Matematické důkazy

Matematika je exaktní věda. Přesná věda. Nepoužívá žádné kdyby, možná. Nepoužívá žádné slovní hrátky a kličky. Netvrdí, že něco jiného říká, něco jiného myslí a nějak jinak to vyznívá. Vše je jednoznačně a jasně definované. Výroky jsou buď pravdivé, nebo nepravdivé, a nebo o jejich pravdě neumíme rozhodnout. Nebojíme se to ale přiznat.

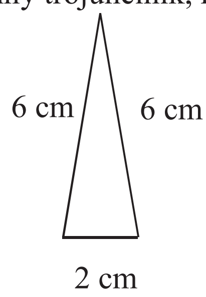
Tady bych se chtěl na chvíli zastavit. Výrok je tvrzení, u kterého má smysl otázka, zda je pravdivé či nepravdivé. Na odpovědi nezáleží. To by pak různá tvrzení byla, nebo také nebyla výrokem jen podle toho, kdo tvrzení posuzuje. Jistě existují tvrzení, o kterých vím, že jsou pravdivá. Jsou to tedy výroky. Ačkoli Vy nedokážete posoudit, zda pravdivé, nebo nepravdivé. A naopak. Sami znáte výroky, o kterých autor neví vůbec nic.

Tvrzení: Mimo sluneční soustavu existuje život. Toto tvrzení je výrok. My jen nevíme, zda pravdivý nebo nepravdivý. Takovým výrokům se říká hypotézy.
I matematika má spoustu hypotéz. Čili výroků o jejichž pravdivosti si každý může myslet své, ale důkaz nemáme. Hledání důkazů je někdy mnohem zajímavější než samotný výrok.
Příkladem matematické hypotézy je např. Goldbachova hypotéza, která tvrdí, že každé sudé přirozené číslo větší než 2 je součtem dvou prvočísel. Je to výrok, ale důkaz jeho pravdivosti ještě nebyl nalezen.

Abychom nějaký výrok mohli považovat za pravdivý, musíme ho dokázat. Bez důkazu o žádném výroku nemůžeme říci, že je pravdivý. O způsobech, jak výroky dokazovat, si něco povíme.
Na úvod ale musíme přiznat, že obecný návod poskytnout nemůžeme. Nic takového neexistuje. Mohli bychom napsat několik knih plných matematických důkazů. Jednotný postup ale není. V důkazech se často používají finty a triky, které nás samotné těžko mohou napadnout.
Než se pustíme do samotných důkazů, povíme si něco o matematických větách a výrocích. Jejich pravdivost pak budeme dokazovat.

Matematické věty mají nejčastěji tvar implikace. Tedy výrok, který něco předpokládá. A z předpokladů už plyne platnost závěru.
Příkladem je snadný výrok. Jestliže je trojúhelník rovnostranný, pak je rovnoramenný (Rovnostranný trojúhelník je takový, který má všechny tři strany stejně dlouhé. Rovnoramenný trojúhelník je takový, který má dvě strany stejně dlouhé.). Tento výrok je jednoduchý a není třeba ho dokazovat. Je to zřejmé. Chci ale ukázat, jak s větami správně pracovat. Máme trojúhelník. Nevíme o něm nic. Když nám někdo řekne, že je rovnostranný, tak já můžu říct, že je rovnoramenný, a budu mít jistotu, že říkám pravdu. Předpoklad věty ale musí být splněn. Jeho pravdivost musí platit. Potom je splněn i závěr. Pokud ale předpoklad neplatí, tak nevíme nic. Pokud trojúhelník není rovnostranný, tak ještě pořád může být rovnoramenný. Nicméně nemusí platit ani to. Ta naše věta zkrátka funguje jen tehdy, když víme, že trojúhelník je rovnostranný. Tedy jen když jsou splněny předpoklady. Jinak nevíme nic. Další věc, na kterou je dobré upozornit je, že implikace jsou jednostranné. Tedy, že platí jen jedním směrem. Pokud prohodíme ve výroku předpoklad a závěr, dostaneme výrok jiný, který už pravdivý být nemusí. Takový výrok se nazývá výrok opačný. Na to se často zapomíná.

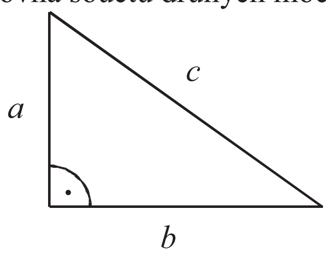
Věta: Pokud je trojúhelník rovnoramenný, pak je rovnostranný. Tato věta je samozřejmě nepravdivá. Existuje totiž jistě rovnoramenný trojúhelník, který není rovnostranný, např.:



Našli jsme tedy protipříklad a ten větu vyvrací. Další příklad (idealistický, který neuvažuje různé smutné příběhy). Je-li moje domácí zvíře pes, tak má 4 nohy. To je platný výrok. Opačně je to ale nesmysl. Jestliže moje zvíře má čtyři nohy, pak je to pes. To už neplatí. Moje kočka má čtyři nohy a rozhodně to není pes.

Na předchozích výrocích bylo zřejmé, že opačné výroky jsou nesmysly, je třeba to mít na paměti a vyvarovat se výchovných chyb typu: Když sníš polévku, pak dostaneš čokoládu. Jenže ten výrok nic neříká o dostání čokolády, pokud polévku nesním. Takže klidně mohu dostat čokoládu a polévku nechat nedojezenou. Rodičovský výrok tak neporuším, protože ten o nesnědění polévky vůbec nic neříká.

Výrok, který není jednostranný (jko implikace) ale oboustranný, je ekvivalence. To je takový výrok, kde platí výrok původní i obrácený. Sníš polévku právě tehdy, když dostaneš čokoládu. Tedy platí: když sním polévku, pak dostanu čokoládu, ale také platí: když dostanu čokoládu, tak jsem snědl polévku. Předpoklad a závěr jsou ekvivalentní. Platí-li jedno, musí platit i druhé a naopak. Příkladem takové matematické věty je věta Pythagorova. Ta říká, že trojúhelník je pravoúhlý právě tehdy, když druhá mocnina délky přepony je rovna součtu druhých mocnin délek odvěsen.



Označíme-li strany v trojúhelníku tak jako na obrázku, c je nejdelší strana, tedy přepona, a strany a, b jsou zbylé dvě strany – odvěsny. Tak Pythagorova věta říká dvě věci: Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak $a^2 + b^2 = c^2$. Ale také říká: Jestliže $a^2 + b^2 = c^2$, pak trojúhelník už musí být pravoúhlý. Neexistuje tedy pravoúhlý trojúhelník, kde by neplatilo
$a^2 + b^2 = c^2$. Stejně tak v každém trojúhelníku, kde platí $a^2 + b^2 = c^2$, musí být jeden úhel pravý.

K Pythagorově větě se ještě vrátíme, úvod ale tímto skončíme a vydáme se za jednotlivými typy důkazů.