Určitý integrál, využití integrálů

Úvod:

V této kapitole se dozvíme, k čemu nám jsou integrály vlastně dobré. Naučíme se počítat obsahy různých složitých obrazců a objemy těles.

Co je potřeba umět:

Musíme umět samozřejmě hlavně integrovat a také umět počítat limity. Využijeme ale také řešení všech druhů rovnic a pro názornost je dobré znát grafy základních funkcí. Pro odvození některých vzorců potřebujeme znát analytickou geometrii, např. kružnice.

Doposud jsme měli jen neurčité integrály. Výsledkem byla funkce.

Výsledkem určitého integrálu je číslo.

$$\int f(x)\ dx = F(x)$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

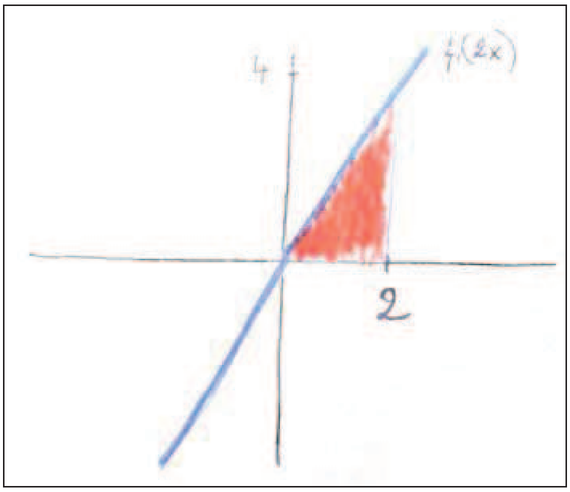
značíme $\left[F(x)\right]_a^b$

Př. $\int_0^2 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^2 = 2^2 - 0^2 = \underline{\underline{4}}$

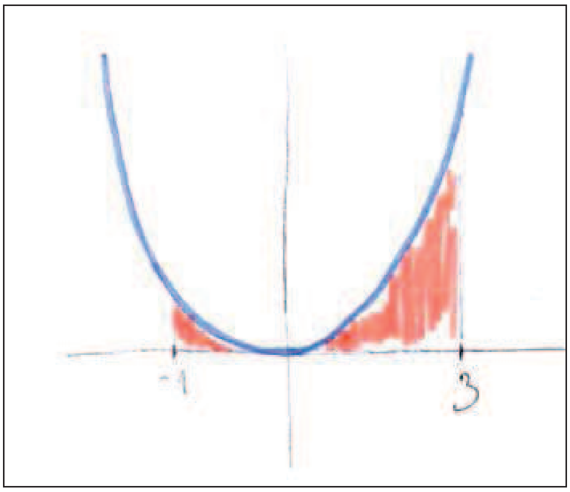
Př. $\int_{-1}^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 9 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{28}{3}}}$

A význam?

$\int_0^2 2x\,dx$ je obsah plochy pod křivkou $2x$ na intervalu $(0,2)$



$\int_{-1}^3 x^2\,dx$ je obsah plochy pod křivkou x^2 na intervalu $(-1,3)$

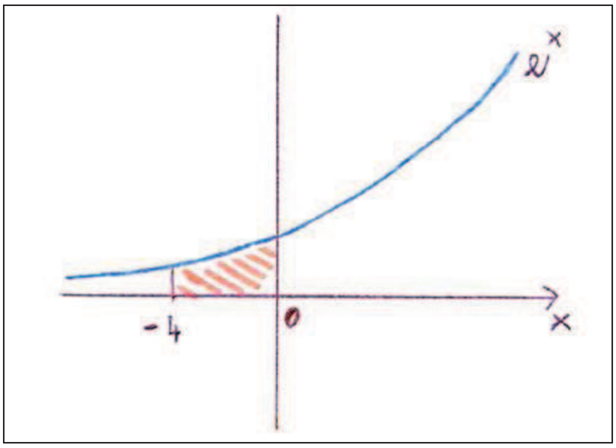


Nevlastní určitý integrál

Počítáme-li určitý integrál – např. $\int_{-4}^{0} e^x \, dx$, tak postup je jasný, funkci zintegrujeme a pak dosadíme hodnoty 0 a -4 a odečteme.

Tedy $\int_{-4}^{0} e^x \, dx = \left[e^x \right]_{-4}^{0} = e^0 - e^{-4} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{e^4}}} \doteq 0,9817$

Spočítali jsme obsah plochy pod křivkou e^x na intervalu $\langle -4; 0 \rangle$



Co když ale máme spočítat $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \, dx$?

Jednoduše! Počítat funkční hodnotu v $-\infty$ je samozřejmě hloupost, co ale můžeme spočítat je $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ a je to.

Postupujeme tak vždy, když nemůžeme spočítat přímo funkční hodnotu. Limitu totiž spočítáme vždy.

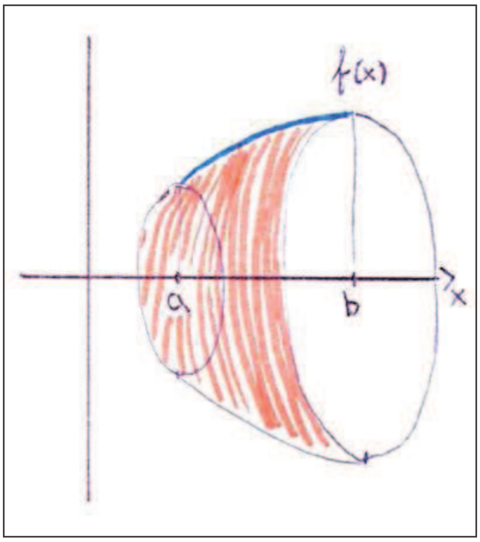
Př. $$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \, dx = \left[e^x\right]_{-\infty}^{0} = e^0 - \left(\lim_{x \to -\infty} e^x\right) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

Co jsme to spočítali? Spočítali jsme obsah plochy pod křivkou e^x na intervalu $\left(-\infty; 0\right\rangle$. Tedy **obsah nekonečné plochy!**

A obsah nekonečné plochy může být konečný!

Objem rotačního tělesa

Vznikne-li nějaké těleso rotací křivky (nějaké funkce $f(x)$) kolem osy *x*, pak jeho objem spočítáme dle vzorečku: $V = \pi \cdot \int\limits_{a}^{b} \left(f(x)\right)^2 \, dx$


f(x)
a
b
x

Řešené příklady

Umíme už spočítat obsah plochy ohraničené dvěma křivkami.

Př. Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $f(x)=x^2-2x+3$ a $g(x)=x+1$

Nejprve musíme zjistit, kde plocha vůbec začíná a kde končí. Musíme proto vyřešit rovnici:

$$f(x)=g(x)$$

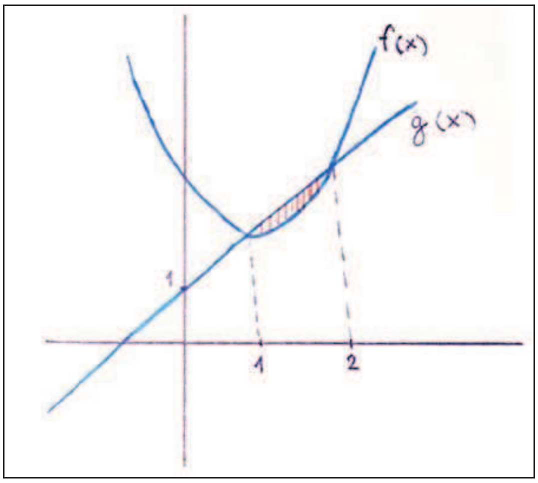
$$x^2-2x+3=x+1$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$D=9-4-2=1$$

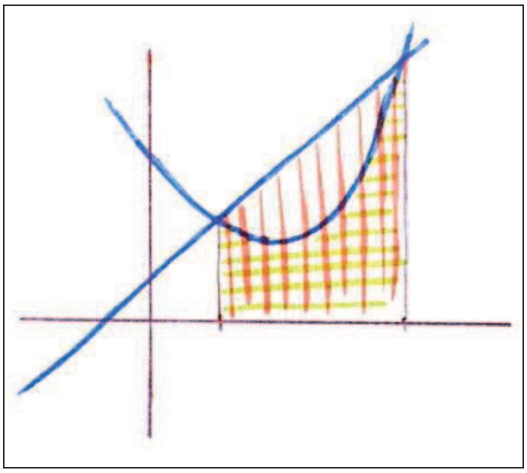
$$x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}\begin{array}{l}\overset{+}{=}2\\ \overset{-}{=}1\end{array}$$

Pomůže nám obrázek



Jak spočítat obsah?

Jednoduše. Od obsahu plochy pod křivkou $g(x)$ odečteme obsah plochy pod křivkou $f(x)$ a zůstane nám obsah požadované plochy.



$$S=\int_1^2 (x+1)-(x^2-2x+3)\ dx=\int_1^2 -x^2+3x-2\ dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=$$

$$=\left(-\frac{2^3}{3}+3\cdot\frac{2^2}{2}-2\cdot2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+3\cdot\frac{1^2}{2}-2\cdot1\right)=\left(-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}-4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)=$$

$$=-\frac{7}{3}+\frac{9}{2}-2=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Pozn.

Všimněte si, že v příkladu jsme od funkce, která je na zkoumaném intervalu větší odečítali funkci nižší.

Pokud bychom je prohodili, pak by se toho příliš nestalo. Výsledek by byl stejný až na znaménko. Pokud nám tedy někdy vyjde záporné číslo, tak nám to říká, že jsme odečítali opačně a z výsledku vezmeme absolutní hodnotu.

Obsah plochy je vždy kladné číslo. Stejně jako například hmotnost tělesa také nemůže