

# Integrály

## Úvod:

*Jedna ze základních kapitol vysokoškolské matematiky, ale také jedna z nejtěžších. Základy zvládne každý, nad těžšími integrály se už musí trochu přemýšlet. Neplatí tu spousta pravidel, která by se na první pohled a dle selského rozumu dala použít. Neexistuje obecný návod (na rozdíl od derivací), jak integrovat součin dvou funkcí nebo podíl dvou funkcí. Musíme používat různé triky, vtipy a finty. Musíme vidět několik tahů dopředu a získat počítáním nějaké zkušenosti. V integrování platí více než kdekoliv jinde, že cvičení dělá opravdové mistry.*

## Co je potřeba umět:

*Musíme znát všechny elementární funkce, jejich vlastnosti a hlavně musíme umět derivace. Umět ale musíme také takové staré věci jako je řešení kvadratických rovnic a dělení polynomu.*

Derivovat umíme. Vezmeme-li funkci  $f$  a zderivujeme ji, dostaneme tak funkci novou.

## Např.

$$x^2 \rightarrow 2x$$

Opačný postup je integrování. Máme funkci  $f$  a ptáme se, jakou funkci jsme museli zderivovat, abychom dostali právě tuto funkci  $f$ .

### Např.

Jakou funkci jsme derivovali, abychom dostali funkci  $2x$ ?

Funkci  $x^2$ !

$$\text{Píšeme: } \int 2x \, dx = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2)' = 2x$$

Říkáme, že funkce  $x^2$  je primitivní funkcí k funkci  $2x$ .

### **Definice**

Funkce  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $I$ , pokud  $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in I$

### **Problém!**

Všimněte si, že:

$$(x^2 + 5)' = 2x$$

Proto  $x^2 + 5$  je také primitivní funkcí k funkci  $2x \Rightarrow \int 2x \, dx = x^2 + 5$

$$(x^2 - 17)' = 2x$$

Proto  $x^2 - 17$  je také primitivní funkcí k funkci  $2x \Rightarrow \int 2x \, dx = x^2 - 17$

$$(x^2 + 2006)' = 2x$$

Proto  $x^2 + 2006$  je také primitivní funkcí k funkci  $2x \Rightarrow \int 2x \, dx = x^2 + 2006$

### **Pozn.**

**Primitivních funkcí k dané funkci tedy existuje spousta, dokonce nekonečně mnoho, stačí přičíst libovolné číslo.**

Zapisujeme tedy:

$$\int 2x \, dx = x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

## Základní integrály

Základní integrály tedy plynou z derivací.

$$\text{Př. } \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int 2x^7 dx = \frac{2}{8} x^8 + c = \frac{x^8}{4} + c$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$\text{obecně: } \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad \forall a \neq -1$$

$$\text{Př. } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\text{Př. } \int 0 dx = c$$

$$\int 1 \, dx = x + c$$

$$\int 2 \, dx = 2x + c$$

**Př.**  $\int e^x \, dx = e^x + c$

$$\int 5^x \, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

$$\int 12^x \, dx = \frac{12^x}{\ln 12} + c$$

$$\int 1^x \, dx = \int 1 \, dx = x + c$$

obecně:  $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad a > 0, a \neq 1$

**Př.**  $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

**Př.**  $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

Všechny tyto integrály musíme dobře znát. Vycházejí přímo z derivací. Nepoužíváme zatím, žádné speciální metody ani triky. Tomuto způsobu integrace se říká **přímá integrace**.