Integrály

Úvod:

Jedna ze základních kapitol vysokoškolské matematiky, ale také jedna z nejtěžších. Základy zvládne každý, nad těžšími integrály se už musí trochu přemýšlet. Neplatí tu spousta pravidel, která by se na první pohled a dle selského rozumu dala použít. Neexistuje obecný návod (na rozdíl od derivací), jak integrovat součin dvou funkcí nebo podíl dvou funkcí. Musíme používat různé triky, vtipy a finty. Musíme vidět několik tahů dopředu a získat počítáním nějaké zkušenosti. V integrování platí více než kdekoliv jinde, že cvičení dělá opravdové mistry.

Co je potřeba umět:

Musíme znát všechny elementární funkce, jejich vlastnosti a hlavně musíme umět derivace. Umět ale musíme také takové staré věci jako je řešení kvadratických rovnic a dělení polynomu.

Derivovat umíme. Vezmeme-li funkci *f* a zderivujeme ji, dostaneme tak funkci novou.

Např.

$$x^2 \to 2x$$

Opačný postup je integrování. Máme funkci *f* a ptáme se, jakou funkci jsme museli zderivovat, abychom dostali právě tuto funkci *f*.

Např.

Jakou funkci jsme derivovali, abychom dostali funkci $2x$?

Funkci x^2!

Píšeme: $\int 2x \, dx = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2)' = 2x$

Říkáme, že funkce x^2 je primitivní funkcí k funkci $2x$.

Definice

Funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$

Problém!

Všimněte si, že:

$(x^2+5)' = 2x$

Proto x^2+5 je také primitivní funkcí k funkci $2x$ $\Rightarrow$ $\int 2x\,dx = x^2+5$

$(x^2-17)' = 2x$

Proto x^2-17 je také primitivní funkcí k funkci $2x$ $\Rightarrow$ $\int 2x\,dx = x^2-17$

$(x^2+2006)' = 2x$

Proto x^2+2006 je také primitivní funkcí k funkci $2x$ $\Rightarrow$ $\int 2x\,dx = x^2+2006$

Pozn.

Primitivních funkcí k dané funkci tedy existuje spousta, dokonce nekonečně mnoho, stačí přičíst libovolné číslo.

Zapisujeme tedy:

$$\int 2x\,dx = x^2+c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Základní integrály

Základní integrály tedy plynou z derivací.

Př. $\int x^4 \; dx = \frac{x^5}{5} + c$

$$\int 2x^7 \; dx = \frac{2}{8}x^8 + c = \frac{x^8}{4} + c$$

$$\int \sqrt{x} \; dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \; dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{x^4} \; dx = \int x^{-4} \; dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

obecně: $\int x^a \; dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad \forall a \neq -1$

Př. $\int \frac{1}{x} \; dx = \ln x + c$

Př. $\int 0 \; dx = c$

$$\int 1\,dx = x + c$$

$$\int 2\,dx = 2x + c$$

Př. $$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

$$\int 12^x\,dx = \frac{12^x}{\ln 12} + c$$

$$\int 1^x\,dx = \int 1\,dx = x + c$$

obecně: $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad a > 0,\ a \neq 1$$

Př. $$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

Př. $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

Všechny tyto integrály musíme dobře znát. Vycházejí přímo z derivací. Nepoužíváme zatím, žádné speciální metody ani triky. Tomuto způsobu integrace se říká **přímá integrace**.