Vícenásobné derivace, využití derivací, průběh funkce

Úvod:

V této kapitole zjistíme, k čemu nám vlastně derivace jsou. A naučíme se, jak s pomocí derivace „vyšetřit“ průběh funkce. Takže na konci kapitoly budeme schopní načrtnout graf i takových funkcí, jako je například $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

Co je potřeba umět:

Musíme ovládat limity funkcí, derivace a také samozřejmě musíme mít základní znalosti o elementárních funkcích.

Už umíme derivovat. Když dostaneme funkci *f* a zderivujeme ji, dostaneme funkci novou. A je tu můžeme klidně znovu zderivovat a znovu.

Př. $\left(x^4\right)''$

$\left(x^4\right)''$ - to znamená dvojnásobnou derivaci, čili funkci x^4 zderivuj a to, co vyjde, zderivuj znovu.

$\left(x^4\right)'' = \left(4x^3\right)' = \underline{\underline{12x^2}}$

Př. $\left(x^2\right)''' = (2x)'' = (2)' = 0$

Př. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

Pozn.

Abychom nemuseli například u páté derivace psát pět čárek, používáme pro vyšší derivace následující značení: $\left(x^2\right)''' = \left(x^2\right)^{(3)}$

Tedy $\left(x^2\right)^{(3)} = (2x)'' = (2)' = 0$

Př. $(\sin x)^{(4)} = (\cos x)^{(3)} = (-\sin x)'' = (-\cos x)' = -(-\sin x) = \underline{\underline{\sin x}}$

Př. $(\ln x)'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \underline{\underline{-\dfrac{1}{x^2}}}$

Využití derivací – l’Hospitalovo pravidlo

Když jsme počítali limity, tak jsme vždy na začátku zkusili dosadit hodnotu, ke které jsme se limitně blížili. Pokud nám ale vyšla limita typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, museli jsme použít některé rafinované techniky.

Př. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Pokud dosadíme, dostaneme $\frac{0}{0}$

Použili jsme ale rafinovaně vytknutí výrazu $x - 3$ z čitatele a jmenovatele.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 3 + 3 = \underline{\underline{6}}$$

Př. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + 3x + 2}$

Pokud dosadíme, dostaneme $\frac{\infty}{\infty}$

Takže finta byla vytknout nejvyšší člen z čitatele i jmenovatele. Zde je to u obou x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{2x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\cdot\overbrace{\left(1+\frac{4}{x}\right)}^{\to 1}}{\cancel{x^2}\cdot\underbrace{\left(2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}_{\to 2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Nyní dostáváme do rukou nový nástroj.

l'Hospitalovo pravidlo

Pokud $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ je typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ pak:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Pokud výraz vpravo existuje.

Vysvětlující douška

Pokud počítáme limitu podílu a vyjde nám limita typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, tak **můžeme zkusit** zderivovat čitatele i jmenovatele a spočítat limitu tohoto podílu.

Můžeme zkusit – tím, že to tak uděláme, nemáme zaručeno, že to půjde vypočítat, protože nevíme ještě nic o tom, jak vypadá $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Př. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-9\right)'}{\left(x-3\right)'}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{1}=\frac{6}{1}=\underline{\underline{6}}$$

Př. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x}{2x^2+3x+2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{2x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+4x\right)'}{\left(2x^2+3x+2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{4x+3}$$

To je znovu limita typu $\dfrac{\infty}{\infty}$, tak můžeme znovu použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x+4\right)'}{\left(4x+3\right)'}=\frac{2}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Př. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=\underline{\underline{1}}$$

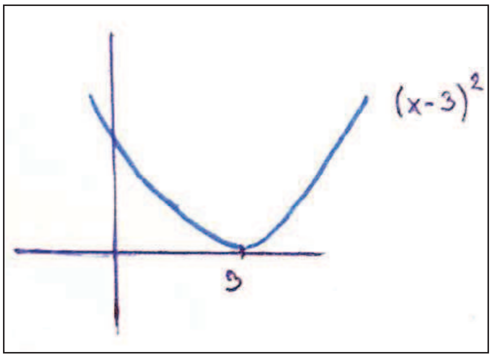
Průběh funkce

Abychom dokázali vyšetřovat průběh funkce (tedy získali přibližnou představu o grafu neznámé funkce), musíme zjistit některé její důležité vlastnosti.

Monotonie

Rozhodujeme o tom, zda je funkce rostoucí nebo klesající, případně na kterém intervalu je rostoucí a na kterém je klesající.

Př. $f(x)=(x-3)^2$

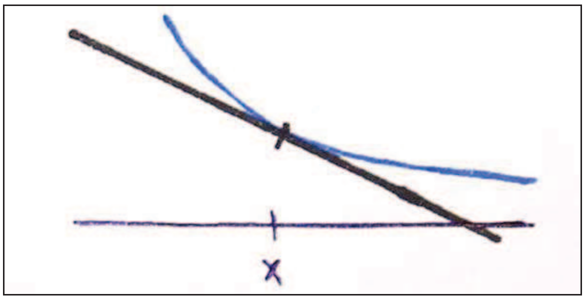


Graf této funkce ale dobře známe. Jde jen o to uvědomit si, že tato funkce je na intervalu $(-\infty,3)$ klesající a na intervalu $(3,\infty)$ rostoucí.

Jak to ale poznat u jiné funkce?

Univerzálním prostředkem je derivace.

To, že je funkce na nějakém okolí bodu *x* klesající, znamená, že také její tečna v bodě *x* je klesající.



A poznat, že je tečna klesající, je snadné. Její směrnice musí být záporná. Tedy **menší než nula.** A co je to směrnice tečny? **Derivace!**

Funkce je klesající v těch bodech, kde je její derivace záporná.

Př. $f(x)=(x-3)^2$

$$f(x)=(x-3)^2=x^2-6x+9$$

$$f'(x)=2x-6$$

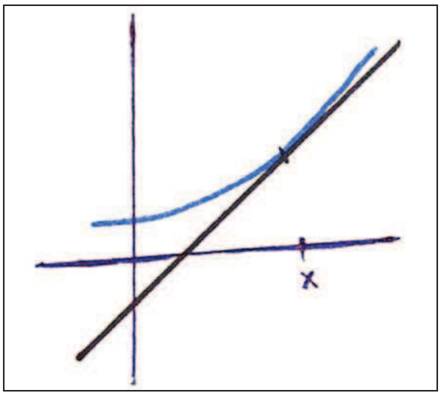
$$2x-6<0$$

$2x < 6$

$x < 3 \quad \Rightarrow$ na intervalu $(-\infty, 3)$ je funkce *f* klesající.

S rostoucí funkcí se to má podobně. Funkce je rostoucí tam, kde je rostoucí její tečna. A ta je rostoucí pokud má kladnou směrnici, tedy derivaci větší než nula.

Př. $f(x) = (x-3)^2$



$f'(x) = 2x - 6$

$2x - 6 > 0$

$2x > 6$

$x > 3 \quad \Rightarrow$ funkce $(x-3)^2$ je tedy rostoucí na intervalu $(3, \infty)$