

## Vícenásobné derivace, využití derivací, průběh funkce

### Úvod:

V této kapitole zjistíme, k čemu nám vlastně derivace jsou. A naučíme se, jak s pomocí derivace „vyšetřit“ průběh funkce. Takže na konci kapitoly budeme schopní načrtnout graf i takových funkcí,

jako je například  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

### Co je potřeba umět:

Musíme ovládat limity funkcí, derivace a také samozřejmě musíme mít základní znalosti o elementárních funkcích.

Už umíme derivovat. Když dostaneme funkci  $f$  a zderivujeme ji, dostaneme funkci novou. A je tu můžeme klidně znovu zderivovat a znovu.

Př.  $(x^4)''$

$(x^4)''$  - to znamená dvojnásobnou derivaci, čili funkci  $x^4$  zderivuj a to, co vyjde, zderivuj znovu.

$$(x^4)'' = (4x^3)' = \underline{\underline{12x^2}}$$

**Př.**  $(x^2)''' = (2x)'' = (2)' = 0$

**Př.**  $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

### **Pozn.**

Abychom nemuseli například u páté derivace psát pět čárek, používáme pro vyšší derivace

následující značení:  $(x^2)''' = (x^2)^{(3)}$

Tedy  $(x^2)^{(3)} = (2x)'' = (2)' = 0$

**Př.**  $(\sin x)^{(4)} = (\cos x)^{(3)} = (-\sin x)'' = (-\cos x)' = -(-\sin x) = \underline{\underline{\sin x}}$

**Př.**  $(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

## Využití derivací – l'Hospitalovo pravidlo

Když jsme počítali limity, tak jsme vždy na začátku zkusili dosadit hodnotu, ke které jsme se limitně blížili. Pokud nám ale vyšla limita typu  $\frac{0}{0}$  nebo  $\frac{\infty}{\infty}$ , museli jsme použít některé rafinované techniky.

**Př.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

---

Pokud dosadíme, dostaneme  $\frac{0}{0}$

Použili jsme ale rafinovaně vytknutí výrazu  $x - 3$  z čitatele a jmenovatele.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 3 + 3 = \underline{\underline{6}}$$

**Př.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + 3x + 2}$

---

Pokud dosadíme, dostaneme  $\frac{\infty}{\infty}$

Takže finta byla vytknout nejvyšší člen z čitatele i jmenovatele. Zde je to u obou  $x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\cancel{2}} \cdot \overbrace{\left(1 + \frac{4}{x}\right)}^{\rightarrow 1}}{x^{\cancel{2}} \cdot \underbrace{\left(2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}_{\rightarrow 2}} = \frac{1}{2}$$

Nyní dostáváme do rukou nový nástroj.

### l'Hospitalovo pravidlo

Pokud  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  je typu  $\frac{0}{0}$  nebo  $\frac{\infty}{\infty}$  pak:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Pokud výraz vpravo existuje.

### Vysvětlující douška

Pokud počítáme limitu podílu a vyjde nám limita typu  $\frac{0}{0}$  nebo  $\frac{\infty}{\infty}$ , tak **můžeme zkusit**

zderivovat čitatele i jmenovatele a spočítat limitu tohoto podílu.

**Můžeme zkusit** – tím, že to tak uděláme, nemáme zaručeno, že to půjde vypočítat, protože

nevíme ještě nic o tom, jak vypadá  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Př.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

---

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{1} = \frac{6}{1} = \underline{6}$$

**Př.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + 3x + 2}$

---

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 4x)'}{(2x^2 + 3x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{4x + 3}$$

To je znovu limita typu  $\frac{\infty}{\infty}$ , tak můžeme znovu použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 4)'}{(4x + 3)'} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

**Př.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

---

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

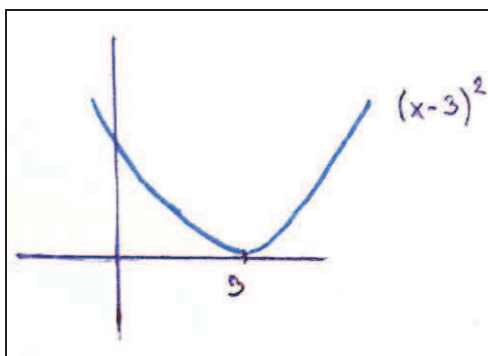
## Průběh funkce

Abychom dokázali vyšetřovat průběh funkce (tedy získali přibližnou představu o grafu neznámé funkce), musíme zjistit některé její důležité vlastnosti.

### Monotonie

Rozhodujeme o tom, zda je funkce rostoucí nebo klesající, případně na kterém intervalu je rostoucí a na kterém je klesající.

Př.  $f(x) = (x-3)^2$

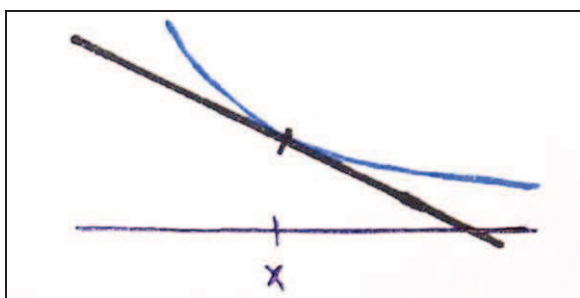


Graf této funkce ale dobře známe. Jde jen o to uvědomit si, že tato funkce je na intervalu  $(-\infty, 3)$  klesající a na intervalu  $(3, \infty)$  rostoucí.

Jak to ale poznat u jiné funkce?

**Univerzálním prostředkem je derivace.**

To, že je funkce na nějakém okolí bodu  $x$  klesající, znamená, že také její tečna v bodě  $x$  je klesající.



A poznat, že je tečna klesající, je snadné. Její směrnice musí být záporná. Tedy **menší než nula**. A co je to směrnice tečny? **Derivace!**

**Funkce je klesající v těch bodech, kde je její derivace záporná.**

Př.  $f(x) = (x-3)^2$

---

$$f(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 < 0$$

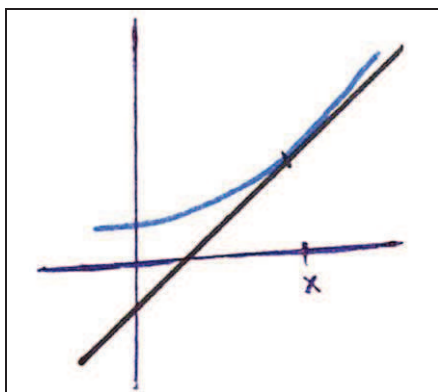


$$2x < 6$$

$x < 3 \Rightarrow$  na intervalu  $(-\infty, 3)$  je funkce  $f$  klesající.

S rostoucí funkcí se to má podobně. Funkce je rostoucí tam, kde je rostoucí její tečna. A ta je rostoucí pokud má kladnou směrnici, tedy derivaci větší než nula.

**Př.**  $f(x) = (x-3)^2$



$$f'(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 > 0$$

$$2x > 6$$

$x > 3 \Rightarrow$  funkce  $(x-3)^2$  je tedy rostoucí na intervalu  $(3, \infty)$