O FUNKCÍCH

Obsah

Nezbytně nutná kapitola, kterou musíte znát pro studium limit, derivací a integrálů. Základ, bez kterého se neobejdete.

Nejprve se seznámíte se všemi typy funkcí, které budete potřebovat, a které je nutné znát, a také s pojmy *definiční obor funkce* a *obor hodnot funkce*. Poznatky z této kapitoly absolvent střední školy už zřejmě zvládá, přesto doporučuji úvodní kapitolu pečlivě projít a prostudovat.

Co musíte umět

Nemusíte umět téměř nic, kromě sčítání, odčítání a dalších základních dovedností.

Vše ostatní vás naučím já.

Co je to funkce

V této kapitole Vás chci seznámit se všemi funkcemi, které můžete ve svém matematickém životě potkat. Jedná se o funkce, kterým se říká elementární. Existují i jiné, ale s těmi se (skoro jistě) nesetkáte.

Elementárních funkcí je nekonečně mnoho, takže popsat každou zvlášť je nemožné. Zavedu systém (třídění) funkcí do 4 přihrádek.

Tím se celá problematika funkcí velmi zpřehlední. Nejprve si ale musíme vysvětlit, co to funkce je.

V odborné literatuře se dočtete, že funkce f je takové zobrazení z množiny A do množiny B, které každému x z množiny A přiřadí jednoznačně (právě jedno) y z množiny B.

Tak je to správně, ale někomu to nemusí být příliš srozumitelné.
Funkci si představujte jako černou skříňku do které z jedné strany vhodíte číslo, a podle jistého návodu (předpisu) vypadne z druhé strany jiné číslo.

Předpis je jednoznačný, černá skříňka tedy neváhá, nerozhoduje se jaké číslo vyhodí, má jen jednu možnost.

Příklad:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Toto je funkce, která vezme číslo x, vynásobí jej samo sebou a přičte k němu jedničku.

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

To je ta naše černá skříňka, do které hodíte čislo 2, a následně vypadne číslo 5. Číslu 2 tedy přiřadíme číslo 5, funkční hodnota v bodě 2 je 5.

$$f(4) = 4^2 + 1 = 17$$

Když hodíte do skříňky číslo 4, tak vypadne číslo 17. Číslu 4 tedy přiřadíme číslo 17, funkční hodnota v bodě 4 je 17.

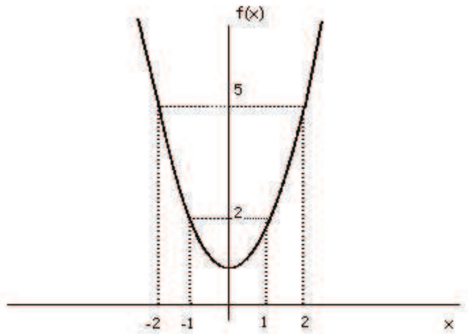
$$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$$

Jestliže vhodíte číslo -3, vypadne číslo 10, funkční hodnota v bodě -3 je 10.

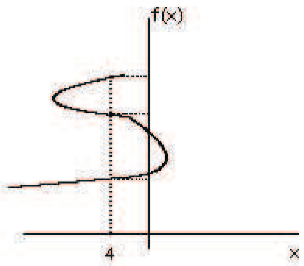
Graf funkce

Graf funkce je obrázek, ze kterého můžete o funkci získat nějakou představu, vidíte její vlastnosti a vyčtete funkční hodnoty. Na vodorovné ose jsou hodnoty x, na svislou osu vynášíme funkční hodnoty, $f(x)$.

Příklad: $f(x) = x^2 + 1$



Poznámka:



Tato "klikatice" nemůže být grafem žádné funkce, protože bodu $x = 4$ bychom mohli přiřadit minimálně tři hodnoty a my víme, že funkce musí být jednoznačná!

Definiční obor a obor hodnot

Definiční obor funkce je množina všech čísel, které do černé skříňky můžeme vhodit, aniž by se porouchala.
Definiční obor funkce f značíme D_f.

Příklad:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Libovolné číslo mohu umocnit na druhou a pak přičíst jedničku, neexistuje tedy žádné číslo, které bychom do skříňky nemohli vhodit.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel, někdy také píšeme místo písmene $\mathbb{R}$ interval $(-\infty, \infty)$

Příklad:

$$f(x) = \frac{4}{x-3}$$

Tato funkce už není tak snášenlivá. Nesmíme totiž dělit nulou! Proto $x \neq 3$, a

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad \text{nebo–li} \quad D_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty).$$

Příklad:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-6x+8}$$

I zde si musíte dát pozor, abyste nedělili nulou. Hledáme proto taková x, pro která platí $x^2 - 6x + 8 = 0$ a tato čísla z definičního oboru vyloučíme.

Řešíme tedy kvadratickou rovnici, což jistě každý umí, ale pro jistotu připomínám:

nejprve se spočítá tzv. diskriminant $\boxed{D = b^2 - 4ac}$.

Čísla a, b, c jsou čísla z kvadratické rovnice (a je číslo u x^2, b je u x a c je to zbývající), tedy $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

.

Kořeny kvadratické rovnice (hledaná x, pro která $x^2 - 6x + 8 = 0$) jsou dány vzorečkem $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$.

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2},$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4, \qquad x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Můžeme si udělat zkoušku. Pro $g(x) = x^2 - 6x + 8$ máme

$$g(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$$

$$g(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0.$$

Čísla 2 a 4 tedy nemůžeme vhodit do černé skříňky, protože bychom dělili nulou. Proto platí:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}, \quad \text{nebo–li} \quad D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty).$$

Obor hodnot funkce je množina všech těch čísel, která z černé skříňky vypadnou, když tam naházíme celý definiční obor.
Obor hodnot funkce f značíme H_f.

Příklad: Urči obor hodnot funkce

$$f(x) = x^2 + 1$$

Určit obor hodnot je obecně těžké, musíme totiž určit nejmenší a největší hodnotu, která z černé skříňky může vypadnout.

To se naučíme až v kapitole o využití derivací a průběhu funkce. V tomto příkladě to ale poznáme.

x^2 je totiž vždy kladné. Nejmenší hodnota, které může nabýt, je nula. Proto nejmenší číslo, které z černé skříňky s nápisem $x^2 + 1$ vypadne, je 1.

Největší hodnota této funkce neexistuje. Čím větší číslo do skříňky vhodíme, tím větší číslo vypadne.

$$H_f =< 1, \infty)$$

Poznámka:

Definice definičního oboru a oboru hodnot mají za cíl jediné - abyste je pochopili. V této podobě je jistě v žádné učebnici nenajdete. Slouží hlavně k vysvětlení a pochopení, a to i za cenu menší přesnosti a korektnosti.

Poslední, co bych chtěl před výčtem konkrétních funkcí připomenout, jsou některé základní vlastnosti funkcí, které můžeme vyšetřovat.

Monotonie

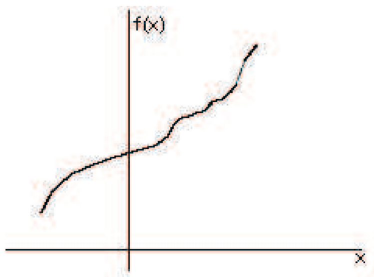
První základní vlastností je monotonie funkce. Monotonií myslíme otázku, zda je funkce rostoucí nebo klesající.

Definice. O funkci řekneme, že je *rostoucí* na intervalu I, jestliže pro každá $x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2$ platí, že také $f(x_1) < f(x_2)$.

Vysvětlující douška: Pokud do funkce házíme větší a větší čísla, tak vypadávají větší a větší hodnoty.

Pohybujeme–li se po grafu tak, jak je obvyklé (tedy zleva doprava), pak graf míří pořád výš a výš (roste).

Příklad:



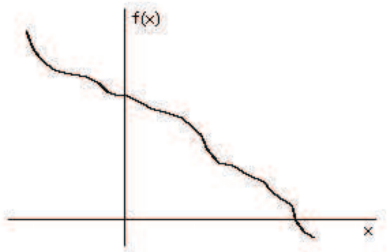
rostoucí funkce

Definice. O funkci řekneme, že je *klesající* na intervalu I, jestliže pro každá $x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2$ platí, že naopak $f(x_1) > f(x_2)$.

Vysvětlující douška: Pokud do funkce házíme větší a větší čísla, tak vypadávají menší a menší hodnoty.

Pohybujeme–li se po grafu tak, jak je obvyklé (zleva doprava), pak graf míří pořád níž a níž (klesá).

Příklad:

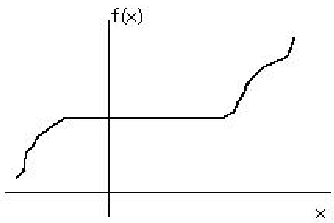


klesající funkce

Definice. O funkci řekneme, že je *neklesající* na intervalu I, jestliže pro každá $x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2$ platí, že $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Vysvětlení: Funkce tedy neklesá, ale nemusí růst!

Příklad:



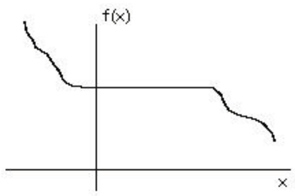
neklesající funkce

- není ale rostoucí!

Definice. O funkci řekneme, že je *nerostoucí* na intervalu I, jestliže pro každá $x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2$ platí, že $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Vysvětlení: Funkce tedy neroste, ale nemusí nutně klesat!

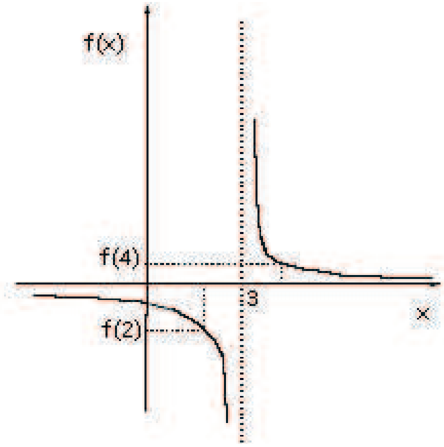
Příklad:



nerostoucí funkce

- není ale klesající!

Poznámka:

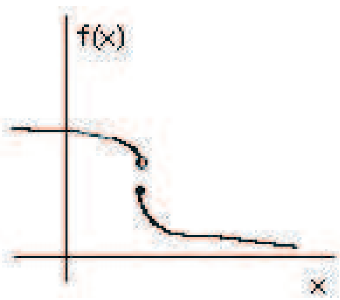


- tato funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 3)$ a $(3, \infty)$

ale není klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$!

$2 < 4$ ale $f(2) < f(4)$

Poznámka:



- tato funkce je klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$, i když na celém intervalu není spojitá ("je přetržená")

Pozn: Přesnou definici spojitosti naleznete v některé z následujících kapitol.

Omezenost

Definice. O funkci f řekneme, že je *omezená zdola* na intervalu I, jestliže existuje nějaké číslo K takové, že pro všechna $x \in I$ je $f(x) \geq K$.

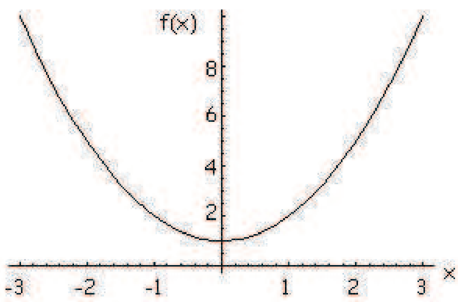
Vysvětlení: Představujeme–li si stále funkci jako černou skříňku, tak ať do ní vhodíme cokoliv, vždy vypadne číslo větší než nějaké K nebo rovné K. Nemůže tedy vypadnout hodnota menší.

Příklad: Rozhodněte, zda je omezená funkce:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Už jsme si říkali, že nejmenší hodnota, kterou z této funkce můžeme získat, je 1. Je tedy zdola omezená a $K = 1$.
(ještě ale také může být $K = 0$, nebo $K = -1$, $K = -17$, ... stačí ale, že takové K existuje).

Graf funkce vypadá takto:



funkce omezená zdola

Definice. O funkci f řekneme, že je *omezená shora* na intervalu I, jestliže existuje nějaké číslo K takové, že pro všechna $x \in I$ je $f(x) \leq K$.

Vysvětlení: Po vhození libovolného čísla do funkce, vždy vypadne číslo menší, než nějaké K nebo rovné K. Nemůže tedy nikdy vypadnout hodnota větší.

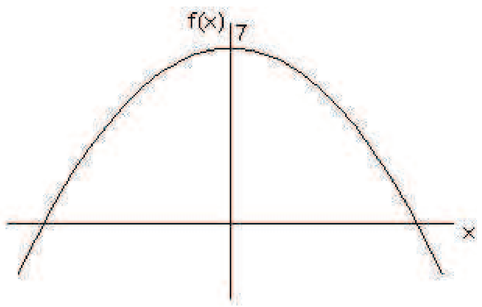
Příklad: Rozhodněte, zda je omezená funkce:

$$f(x) = -x^2 + 7$$

Číslo x^2 je vždy větší nebo rovno nule, proto číslo $-x^2$ je vždy menší nebo rovno nule. Tudíž:

$$f(x) = -x^2 + 7 \leq 7 \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}$$

Funkce je omezená shora.



funkce omezená shora

Prostota

Dalším důležitým pojmem je prostota funkce.

Definice. O funkci $f(x)$ řekneme, že je *prostá*, platí–li, že pokud $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Jinak zapsáno, jestliže $f(x_1) = f(x_2)$, pak také $x_1 = x_2$.

Vysvětlující douška: Funkce je prostá, jestliže každá hodnota z $H(f)$ je přiřazena jen jedenkrát. Tedy jen jednomu číslu z definiční oboru.

Vhodíme–li do naší černé skříňky dvě různá čísla, tak musí vypadnout dvě různé hodnoty.

Funkce $f(x) = x^2$ není prostá, protože dvěma různým číslům přiřadí stejnou hodnotu. $f(-3) = 9$ ale také $f(3) = 9$.
Jedna hodnota ($y = 9$) z oboru hodnot je přiřazena dvěma různým číslům ($x_1 = -3$, $x_2 = 3$) z definičního oboru.

Sudost, lichost

Sudá funkce

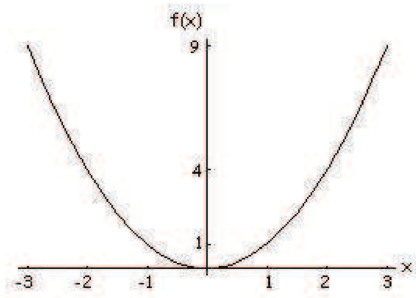
O funkci $f(x)$ řekneme, že je *sudá*, pokud funkční hodnoty pro čísla opačná jsou stejné. Nezáleží na znaménku čísla x.

Zapisujeme $f(x) = f(-x)$.

Pokud do černé skříňky vhodíme např. číslo 2, tak vypadne stejná hodnota, jako kdybychom vhodili číslo -2.

Příklad:

$$f(x) = x^2$$



$f(2) = f(-2) = 4$
$f(11) = f(-11) = 121$ atd.

Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y.

Lichá funkce

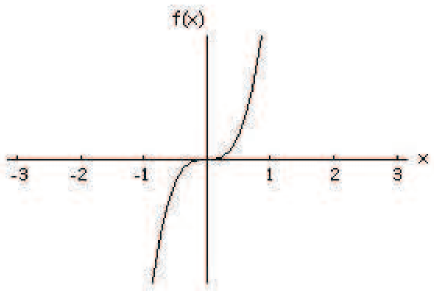
Funkční hodnoty liché funkce pro čísla opačná už nemusí být stejné, ale liší se jen znaménkem.

Zapisujeme $f(x) = -f(-x)$.

Pokud do černé skříňky vhodíme např. číslo 2, tak vypadne hodnota lišící se jen ve znaménku od hodnoty, která vypadne po vhození čísla -2.

Příklad:

$$f(x) = x^3$$



$f(2) = 8 \quad f(-2) = -8$
$f(5) = 25 \quad f(-5) = -25$ atd.

Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku.

Závěr:

Vysvětlili jsme si tedy základní vlastnosti funkcí, které budeme nadále často používat.

Nyní k jednotlivým typům funkcí.
Existují jen 4 velké skupiny funkcí. Všechny ostatní vzniknou jejich sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním.