Nekonečné řady

Mějme posloupnost $a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots$

Symbol $\sum_{n=1}^{k} a_n$ znamená součet prvních k členů

Tedy $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_k$

Nebo konkrétní příklad: $\sum_{n=1}^{5} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

My se ale nyní budeme zabývat tím, co dostaneme, když sečteme všechny členy posloupnosti.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Co přesně tento symbol znamená?

Pokud označíme $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ součet prvních k členů

Pak $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $s = \lim_{k \to ?} s_k$

Jednoduchoučké příklady

Př. $a_n = 0$

Tedy $a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$

Pak zřejmě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$

Př. $a_n = n$

Tedy $a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = 5$

Tedy:

$$s_1 = 1 \quad s_2 = \sum_{n=1}^{2} a_n = 1 + 2 = 3 \quad s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad s_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Neustále tedy přičítáme větší a větší čísla.

Zřejmě je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Pokud máme tedy nějakou posloupnost a_n, tak chceme rozhodnout, zda její součet je konečné číslo (případně to číslo i určit, ale to je obecně těžké). V tom případě říkáme, že řada **konverguje**.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Případně zda ten součet neexistuje a nebo roste nade všechny meze. Říkáme pak, že řada **diverguje**.

Představíme si tedy nějaká pravidla, která nám o konvergenci (případně divergenci) rozhodují.

Nejprve ale některé důležité řady.

Geometrická řada

To je řada tvořená geometrickou posloupností. Tedy platí, že $a_{n+1} = q \cdot a_n$

$q \in \mathbb{R}$ - kvocient

Př. $a_1 = 1$ q=2 $\Rightarrow$ $a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 4 \quad a_4 = 8 \quad a_5 = 16 \quad a_6 = 32 \quad a_7 = 64\ldots$

Př. $a_1 = 2 \quad q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{1}{4} \quad a_5 = \frac{1}{8} \quad a_6 = \frac{1}{16} \quad a_7 = \frac{1}{32} \ldots$

Víme (ze střední školy), že součet prvních ***k*** prvků geometrické posloupnosti, pokud $q \neq 1$, lze spočítat.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

Proto, aby řada konvergovala, tak musí existovat:

$\lim\limits_{k \to ?} a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$ a ta existuje jen pro $|q| < 1$

pak $\lim\limits_{k \to \infty} q^k = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \lim\limits_{k \to \infty} s_k = \underline{\underline{\frac{a_1}{1-q}}}$

je-li a_n geometrická posloupnost a $a_1 \neq 0$ pak

$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ tedy konverguje

$|q| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ nebo neexistuje, ale v každém případě diverguje.

Př. $a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{2}$

Tedy $a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{4} \quad a_4 = \frac{1}{8} \quad a_5 = \frac{1}{16}$

$|q| < 1$ proto

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a dokonce známe i součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

Tedy $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2$

Harmonická řada

Další důležitou řadou je řada z posloupnosti $a_n=\frac{1}{n}$, neboli řada harmonická.

Tedy $a_1=1 \quad a_2=\frac{1}{2} \quad a_3=\frac{1}{3} \quad a_4=\frac{1}{4} \quad a_5=\frac{1}{5}\ldots$

Tato řada **diverguje**. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

Protože: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}}+\ldots$

Proto neustále přičítáme čísla větší ½ a tedy součet řady roste nade všechny meze (ano, k tomu, abychom dosáhli hodnoty větší než ½ potřebujeme vždy více a více členů, ale my jich máme k dispozici nekonečně mnoho, takže nám to nevadí.)

Součet prvních	4	členů je tedy více než	2
	8	- || -	2,5
	16	- || -	3
	32	- || -	3,5
	64	- || -	4
	128	- || -	4,5