LIMITA POSLOUPNOSTI

Úvod:

Kapitola, kde poprvé narazíme na nekonečno. Argumenty posloupností rostou nade všechny meze a zkoumáme, jak vypadají hodnoty posloupnosti. V kapitole se seznámíte se základními typy limit a početními technikami, které vedou ke správným výsledkům.

Co je potřeba umět:

Bez znalostí elementárních funkcí se v této kapitole neobejdete.

Posloupnosti známe, posloupnost je funkce, jejíž definiční obor je množina přirozených čísel.

Př. $a_n = \frac{1}{n}$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} = 0,5 \quad a_3 = \frac{1}{3} = 0,\overline{3} \quad a_4 = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \ldots$$

Můžeme určit libovolný člen. Stý člen posloupnosti je $a_{100} = \frac{1}{100} = 0,01$

Nyní nás ale zajímá, jak vypadají členy posloupnosti, když n (označující n-tý člen) roste nade všechny meze, tedy do nekonečna.

Naše posloupnost je klesající, každý člen je menší než ten předchozí, vidíme tak, že členy se neustále zmenšují.

Blíží se k nule. $a_{1000} = 0{,}001$ $a_{10000} = 0{,}0001$

Řekneme, že limita naší posloupnosti je nula; zapisujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Definice

Přesná definice vypadá takto:

Řekneme, že posloupnost a_n má limitu A, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \ ; \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Vysvětlující douška

(na našem příkladu)

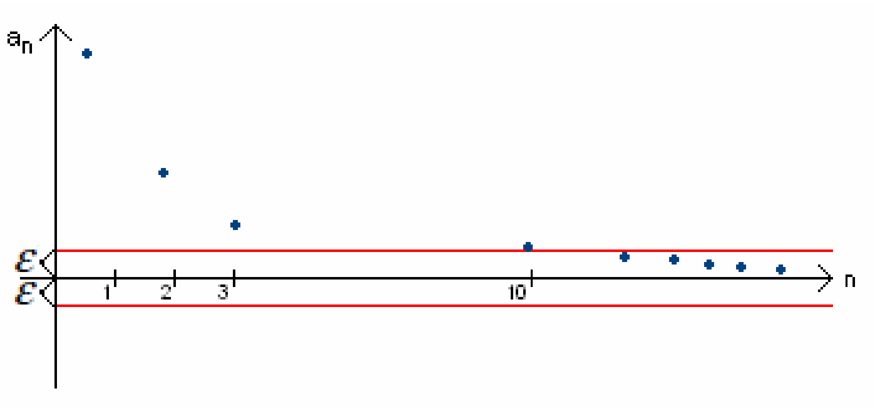
$a_n = \frac{1}{n}$ $A = 0$

Takže $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \ ; \ n > n_0 \quad |a_n| < \varepsilon$

Česky: pro libovolně malé číslo ε (které je větší než nula) existuje index (nějaké číslo) takové, že všechny členy posloupnosti s vyšším indexem jsou od hodnoty nula vzdáleny méně než dané ε.

Př. *Někdo nám dá např.* $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$

Hledám index n_0 *takový, že všechny následující prvky posloupnosti budou v intervalu* $\left(-\dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{10}\right)$



Zajímá mě, kdy $a_n < \varepsilon$ $\quad \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10}$

To platí pro $n > 10 \quad n_0 = 10$

Pro $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ *je zřejmě* $n_0 = 100$

Tedy obecně $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$

Ať je teď ε *libovolné,* n_0 *vždy najdu. Proto* $\lim \dfrac{1}{n} = 0$

Př. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$a_1 = \dfrac{1}{2} = 0,5 \quad a_2 = \dfrac{2}{3} = 0,\overline{6} \quad a_3 = \dfrac{3}{4} = 0,75 \quad a_4 = \dfrac{4}{5} = 0,8 \quad \dots$

$a_{99} = \dfrac{99}{100} = 0,99 \quad a_{999} = \dfrac{999}{1000} = 0,999 \quad \dots$

Vidíme, že hodnoty se blíží neustále k jedničce.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

<u>Důkaz</u>

např. $\varepsilon = \dfrac{1}{10} = 0,1$

Hledám n_0*, aby* $|a_n - 1| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n \in (0,9;\ 1,1)$

$$\frac{n}{n+1} > \frac{9}{10} \quad \Rightarrow \quad n_0 = 9$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100} = 0,01$$

Tak chceme, aby $a_n \in (0,99;\ 1,01)$

$$\frac{n}{n+1} > \frac{99}{100} \quad \Rightarrow \quad n_0 = 99$$

Obecně $\underline{\varepsilon} \quad \Rightarrow$ *chceme* $a_n \in (1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$

$$\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > (n+1)(1-\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad n > n+1-\varepsilon\cdot n-\varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon \cdot n > 1-\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Proto $n_0 = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

Ať je ε *libovolné, vždy najdu* n_0.

Proto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

V obou předchozích případech byla limita nějaké reálné číslo. Říkáme, že limita je **vlastní**.

Př. $a_n = n$

$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad \ldots \quad a_{10} = 10 \quad a_{100} = 100$

Vidíme, že hodnoty naší posloupnosti se neustále zvětšují. Říkáme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

DEFINICE

a_n je posloupnost, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Pokud $\forall K > 0 \quad \exists n_0; \quad a_n > K$

Vysvětlující douška

Hodnoty posloupnosti mají růst do nekonečna, nade všechny meze. Takže když mi někdo dá libovolně velké číslo *K*. Tak od určitého indexu musí hodnoty posloupnosti být větší než *K*. Pokud dokážu takový index najít pro každé *K*, pak limita je ∞.

Př. $a_n = n$

$Pro\ \ K = 100\ \ je\ zřejmě\ \ n_0 = 100\ \ protože\ \ a_{100} = 100$

$pro\ \ n > n_0 = 100\ \ je\ \ a_n > K$

$Pro\ \ K = 1000\ \ je\ \ n_0 = 1000$

$\vdots$

$n_0 = K$

Př. $a_n = n^2$

$a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 16 \quad \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Protože

$K = 100\ \ stačí\ \ n_0 = 10,\ protože\ \ a_{10} = 100$

$K = 10000\ \ je\ \ n_0 = 100,\ protože\ \ a_{100} = 10000$

$Takže\ \ \underline{n_0 = \sqrt{K}}$

Př. $a_n = -n + 2$

$a_1 = +1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1 \quad \ldots \quad a_{10} = -8 \quad \ldots \quad a_{102} = -100 \quad \ldots \quad a_{1002}$

Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

DEFINICE

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud $\forall K \quad \exists n_0; \quad a_n < K$

Pokud je limita posloupnosti ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že limita je **nevlastní**.

Limita posloupnosti ale nemusí existovat.

Př. $a_n = (-1)^n$

$a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1$

Hodnoty posloupnosti oscilují. K žádné hodnotě se v nekonečnu neblíží - pořád skáčou.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = neexistuje$

Mějme dvě posloupnosti a_n a b_n. Pak platí:

Věta

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

Pokud se ovšem nejedná o výraz $\infty - \infty$

Př. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

Př. $\lim_{n\to\infty}(n^2 - n)$

Zde nelze větu použít.

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n^2 - \lim_{n\to\infty} n = \infty - \infty = \underline{\textbf{\textit{nevíme!}}}$$

Obdobná věta platí i pro součin a podíl limit.

Věta

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Pokud výraz vpravo má smysl.

Věta

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Pokud výraz vpravo má smysl.

Poznámka

V předchozích větách se objevila věta: Pokud výraz vpravo má smysl. Co to přesně znamená?

Věty platí pokud se nejedná a tzv. neurčité výrazy.

Neurčitý výraz je např. $0\cdot\infty$ Neurčitý výraz je to proto, že výsledkem může být cokoliv. Nelze určit (bez podrobnějšího zkoumání) výsledek. Situaci objasním na následujících příkladech.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n=0\cdot\infty$ přitom ale $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(1)=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n=0\cdot\infty$ přitom ale $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n^2=0\cdot\infty$ ale $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$

Všechny tři limity byly typu $0\cdot\infty$, ale výsledky jsou různé. Proto říkáme, že výraz je neurčitý a věty nelze použít, protože $0\cdot\infty$ může být skutečně cokoliv.

Další neurčité výrazy jsou: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\frac{\check{c}\acute{\imath}slo}{0}$, 0^∞, ∞^0, 0^0

Oproti tomu následující výrazy smysl mají: $\infty+\infty=\infty$, $\frac{\check{c}\acute{\imath}slo}{\infty}=0$, $\infty\cdot\infty=\infty$, $\textit{kladné číslo}\cdot\infty=\infty$,

$\textit{záporné číslo}\cdot\infty=-\infty$

Nyní si projdeme jednotlivé limity podle typů, podobně jako je to v kapitole O funkcích.

I. MOCNINNÉ LIMITY

Jedná se o limity, kde se vyskytují jen mocninné posloupnosti (funkce), tj. limity, kde neznámá je jen v základech posloupností (funkcí), ale v mocnině jsou jen čísla! Nikdy ne neznámá!

Rada nad zlato:

Rozhodující je nejrychleji rostoucí člen-V případě mocninných limit je to člen s nejvyšší mocninou!

Proto jej vždy vytkneme. Jak toto pravidlo funguje, uvidíme v následujících příkladech.

Př. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - n$

Pravidlo o limitě rozdílu nelze použít.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Odečítáme od sebe dvě nekonečna. Které nekonečno je ale větší?

Vzpomene si na ***radu****. Nejdůležitější je člen s nejvyšší mocninou!*

Protože:

$$\left.\begin{array}{ll} a_n = n^2 & a_{10} = 100 \\ b_n = n & b_{10} = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_{10} - b_{10} = 90$$

$$a_{100} = 10000 \qquad b_{100} = 100 \quad \Rightarrow \quad a_{100} - b_{100} = 9900$$

proto převáží člen n^2, n^2 *roste rychleji než* n.

Použití rady pak vypadá takto:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty \cdot 1 = \underline{\underline{\infty}}$$

Př. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+5n-12}{3n^2-6n+68}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n-12}{3n^2-6n+68}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\cdot\overbrace{\left(4+\frac{5}{n}-\frac{12}{n^2}\right)}^{\to 4}}{\cancel{n^2}\cdot\underbrace{\left(3-\frac{6}{n}+\frac{68}{n^2}\right)}_{\to 3}}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Př. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\underline{\underline{0}}$$

V případě, že máme limitu rozdílu, kde se vyskytuje odmocnina, pak většinou výraz rozšíříme stejným výrazem, jen ten druhý bude s opačným znaménkem. Využijeme tak vzorce $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

Př. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\underline{\underline{0}}$$