

LIMITA POSLOUPNOSTI

Úvod:

Kapitola, kde poprvé narazíme na nekonečno. Argumenty posloupností rostou nade všechny meze a zkoumáme, jak vypadají hodnoty posloupností. V kapitole se seznámíte se základními typy limit a početními technikami, které vedou ke správným výsledkům.

Co je potřeba umět:

Bez znalostí elementárních funkcí se v této kapitole neobejdete.

Posloupnosti známe, posloupnost je funkce, jejíž definiční obor je množina přirozených čísel.

Př. $a_n = \frac{1}{n}$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} = 0,5 \quad a_3 = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} \quad a_4 = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \dots$$

Můžeme určit libovolný člen. Stý člen posloupnosti je $a_{100} = \frac{1}{100} = 0,01$

Nyní nás ale zajímá, jak vypadají členy posloupnosti, když n (označující n -tý člen) roste nade všechny meze, tedy do nekonečna.

Naše posloupnost je klesající, každý člen je menší než ten předchozí, vidíme tak, že členy se neustále zmenšují.

Blíží se k nule. $a_{1000} = 0,001$ $a_{10000} = 0,0001$

Řekneme, že limita naší posloupnosti je nula; zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

DEFINICE

Přesná definice vypadá takto:

Řekneme, že posloupnost a_n má limitu A , jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 ; n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Vysvětlující douška

(na našem příkladu)

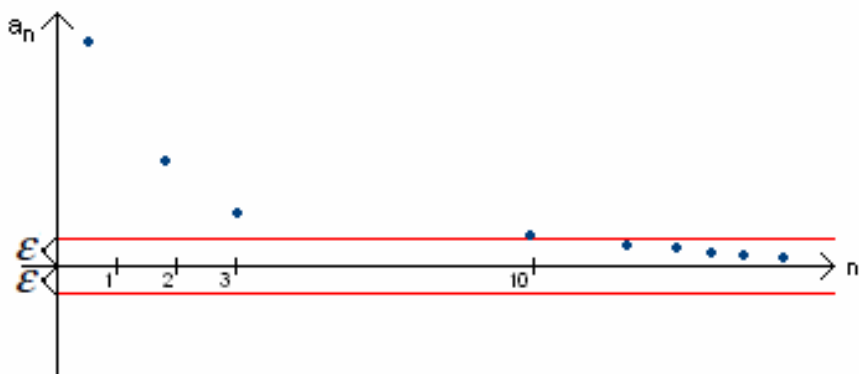
$$a_n = \frac{1}{n} \quad A = 0$$

Takže $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 ; n > n_0 \quad |a_n| < \varepsilon$

Česky: pro libovolně malé číslo ε (které je větší než nula) existuje index (nějaké číslo) takové, že všechny členy posloupnosti s vyšším indexem jsou od hodnoty nula vzdáleny méně než dané ε .

Př. Někdo nám dá např. $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Hledám index n_0 takový, že všechny následující prvky posloupnosti budou v intervalu $\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$



Zajímá mě, kdy $a_n < \varepsilon$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$

To platí pro $n > 10$ $n_0 = 10$

Pro $\varepsilon = \frac{1}{100}$ je zřejmě $n_0 = 100$

Tedy obecně $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

Ať je teď ε libovolné, n_0 vždy najdu. Proto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Př. $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$a_1 = \frac{1}{2} = 0,5 \quad a_2 = \frac{2}{3} = 0,\bar{6} \quad a_3 = \frac{3}{4} = 0,75 \quad a_4 = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \dots$$

$$a_{99} = \frac{99}{100} = 0,99 \quad a_{999} = \frac{999}{1000} = 0,999 \quad \dots$$

Vidíme, že hodnoty se blíží neustále k jedničce.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Důkaz

např. $\varepsilon = \frac{1}{10} = 0,1$

Hledám n_0 , aby $|a_n - 1| < \varepsilon \Rightarrow a_n \in (0,9; 1,1)$

$$\frac{n}{n+1} > \frac{9}{10} \Rightarrow n_0 = 9$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100} = 0,01$$

Tak chceme, aby $a_n \in (0,99; 1,01)$

$$\frac{n}{n+1} > \frac{99}{100} \Rightarrow n_0 = 99$$

Obecně $\underline{\varepsilon} \Rightarrow$ chceme $a_n \in (1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$

$$\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow n > (n+1)(1-\varepsilon) \Leftrightarrow n > n+1-\varepsilon \cdot n-\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot n > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\text{Proto } n_0 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

At' je ε libovolné, vždy najdu n_0 .

$$\text{Proto } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

V obou předchozích případech byla limita nějaké reálné číslo. Říkáme, že limita je **vlastní**.

Př. $a_n = n$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad \dots \quad a_{10} = 10 \quad a_{100} = 100$$

Vidíme, že hodnoty naší posloupnosti se neustále zvětšují. Říkáme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

DEFINICE

a_n je posloupnost, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Pokud $\forall K > 0 \quad \exists n_0; \quad a_n > K$

Vysvětlující douška

Hodnoty posloupnosti mají růst do nekonečna, nade všechny meze. Takže když mi někdo dá libovolně

velké číslo K . Tak od určitého indexu musí hodnoty posloupnosti být větší než K . Pokud dokážu takový index najít pro každé K , pak limita je ∞ .

Př. $a_n = n$

Pro $K = 100$ je zřejmě $n_0 = 100$ protože $a_{100} = 100$

pro $n > n_0 = 100$ je $a_n > K$

Pro $K = 1000$ je $n_0 = 1000$

⋮

$n_0 = K$

Př. $a_n = n^2$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 16 \quad \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Protože

$K = 100$ stačí $n_0 = 10$, protože $a_{10} = 100$

$K = 10000$ je $n_0 = 100$, protože $a_{100} = 10000$

Takže $n_0 = \sqrt{K}$

Př. $a_n = -n + 2$

$$a_1 = +1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1 \quad \dots \quad a_{10} = -8 \quad \dots \quad a_{102} = -100 \quad \dots \quad a_{1002}$$

Zřejmě $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

DEFINICE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ pokud } \forall K \exists n_0; a_n < K$$

Pokud je limita posloupnosti ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že limita je **nevlastní**.

Limita posloupnosti ale nemusí existovat.

Př. $a_n = (-1)^n$

$$a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1$$

Hodnoty posloupnosti oscilují. K žádné hodnotě se v nekonečnu neblíží - pořád skáče.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{neexistuje}$$

Mějme dvě posloupnosti a_n a b_n . Pak platí:

Věta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Pokud se ovšem nejedná o výraz $\infty - \infty$

Př. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 0 + 1 = \underline{1}$$

Př. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n)$

Zde nelze větu použít.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty - \infty = \underline{\text{nevíme!}}$$

Obdobná věta platí i pro součin a podíl limit.

Věta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Pokud výraz vpravo má smysl.

Věta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Pokud výraz vpravo má smysl.

Poznámka

V předchozích větách se objevila věta: Pokud výraz vpravo má smysl. Co to přesně znamená?

Věty platí pokud se nejedná a tzv. neurčité výrazy.

Neurčitý výraz je např. $0 \cdot \infty$. Neurčitý výraz je to proto, že výsledkem může být cokoliv. Nelze určit (bez podrobnějšího zkoumání) výsledek. Situaci objasním na následujících příkladech.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = 0 \cdot \infty \quad \text{přitom ale} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = 0 \cdot \infty \quad \text{přitom ale} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 0 \cdot \infty \quad \text{ale} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

Všechny tři limity byly typu $0 \cdot \infty$, ale výsledky jsou různé. Proto říkáme, že výraz je neurčitý a věty nelze použít, protože $0 \cdot \infty$ může být skutečně cokoliv.

Další neurčité výrazy jsou: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{\text{číslo}}{0}$, 0^∞ , ∞^0 , 0^0

Oproti tomu následující výrazy smysl mají: $\infty + \infty = \infty$, $\frac{\text{číslo}}{\infty} = 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\text{kladné číslo} \cdot \infty = \infty$,

$\text{záporné číslo} \cdot \infty = -\infty$

Nyní si projdeme jednotlivé limity podle typů, podobně jako je to v kapitole O funkcích.

I. MOCNINNÉ LIMITY

Jedná se o limity, kde se vyskytují jen mocninné posloupnosti (funkce), tj. limity, kde neznámá je jen v základech posloupností (funkcí), ale v mocnině jsou jen čísla! Nikdy ne neznámá!

Rada nad zlato:

Rozhodující je nejrychleji rostoucí člen-V případě mocninných limit je to člen s nejvyšší mocninou!

Proto jej vždy vytkneme. Jak toto pravidlo funguje, uvidíme v následujících příkladech.

Př. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n$

Pravidlo o limitě rozdílu nelze použít.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

Odečítáme od sebe dvě nekonečna. Které nekonečno je ale větší?

*Vzpomene si na **radu**. Nejdůležitější je člen s nejvyšší mocninou!*

Protože:

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n^2 \quad a_{10} = 100 \\ b_n = n \quad b_{10} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{10} - b_{10} = 90$$

$$a_{100} = 10000 \quad b_{100} = 100 \Rightarrow a_{100} - b_{100} = 9900$$

proto převáží člen n^2 , n^2 roste rychleji než n .

Použití rady pak vypadá takto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty \cdot 1 = \underline{\underline{\infty}}$$

Př. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n - 12}{3n^2 - 6n + 68}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n - 12}{3n^2 - 6n + 68} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} \cdot \overbrace{\left(4 + \frac{5}{n} - \frac{12}{n^2}\right)}^{\rightarrow 4}}{\cancel{n^2} \cdot \underbrace{\left(3 - \frac{6}{n} + \frac{68}{n^2}\right)}_{\rightarrow 3}} = \frac{4}{3}$$

Př. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2 - n-1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = 0$$

V případě, že máme limitu rozdílu, kde se vyskytuje odmocnina, pak většinou výraz rozšíříme stejným výrazem, jen ten druhý bude s opačným znaménkem. Využijeme tak vzorce $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

Př. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n} \right) \cdot \frac{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = 0$$