Inverzní matice, maticové rovnice

Úvod: Závěrečná kapitola lineání algebry vysvětlující početní postupy s maticemi k řešení maticových rovnic

Co je potřeba umět: Nezbytné pojmy jsou matice – jejich sčítání, odčítání a násobení.

Cílem kapitoly je zvládnout řešit rovnice, ale nikoli s čísly ale s maticemi.
Podívejme se ale podrobněji na počítání s čísly, bude zapotřebí jistého zobecnění a nadhledu.
Řešme jednoduchou rovnici např. $5x+7=17$. Hledáme neznámé číslo *x*, které ji splňuje. Postup řešení je zřejmý. Nejprve od celé rovnice odečteme číslo 7, dostaneme tak $5x=10$ a nakonec celou rovnici vydělíme číslem 5 a máme výsledek.

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 17 \quad |-7 \\ 5x &= 10 \quad |:5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

S čísly bychom jistě zvládli vyřešit i obecnější rovnici např. $ax+b=c$, kde *x* je neznámá a *a*,*b*,*c* jsou daná čísla. Postup řešení je stejný jako v předchozím příkladu.

$$\begin{aligned} ax+b &= c \quad |-b \\ ax &= c-b \quad |:a \\ x &= \tfrac{c-b}{a} \end{aligned}$$

Naším úkolem je nyní vyřešit úlohu $AX+B=C$, kde *X* je neznámá matice a *A*,*B*,*C* jsou dané matice. K tomu potřebujeme umět sčítat, odčítat, násobit a dělit matice. Dělit matice ale přímo nelze, lze je násobit maticí inverzní. Vraťme se nyní opět k úvodní rovnici a vyřešme ji ale s podmínkou, že je dělení zakázané. Jak si poradíme? Jednoduše, místo dělení číslem 5 budeme celou rovnici násobit číslem 0,2. Což je jiný zápis čísla $\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 17 \quad |-10 \\ 5x &= 10 \quad |\cdot 0{,}2 \\ 0{,}2\cdot 5x &= 0{,}2\cdot 10 \\ x &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x+7 &= 17 \quad |-10 \\ 5x &= 10 \quad |\cdot \tfrac{1}{5} \\ \tfrac{1}{5}\cdot 5x &= \tfrac{1}{5}\cdot 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Obecnější rovnici bez dělení vyřešíme obdobně:

$$\begin{aligned} ax+b &= c && \Big| -b \\ ax &= c-b && \Big| \cdot \tfrac{1}{a} \\ \tfrac{1}{a}\cdot ax &= \tfrac{1}{a}\cdot(c-b) \\ x &= \tfrac{1}{a}\cdot(c-b) \end{aligned}$$

Vypadá to jednoduše, jde mi jen o to, abyste si uvědomili, že úvahy, které nyní rozšíříme na matice už znáte.

Když jsme si zakázali dělení, dokázali jsme si pomoci chytrým násobením. Místo dělení číslem 5, jsme násobili číslem $\frac{1}{5}$. Místo dělení číslem *a* jsme násobili číslem $\frac{1}{a}$. Takovým číslům se říká čísla inverzní. Využili jsme toho, že výsledek součinu čísla a čísla inverzního je roven jedničce.

Jednička je zajímavé číslo. Vynásobíte-li ji s libovolným číslem, vyjde Vám znovu ono libovolné číslo. Existuje něco takového i v maticích? Existuje matice taková, že vynásobíme-li ji libovolnou maticí, pak výsledkem bude znovu ona libovolná matice? Odpoveď je kladná. Taková matice existuje a říká se jí **jednotková matice**. Je to čtvercová matice, která má na diagonále samé jedničky a na ostatních pozicích jsou nuly. Jednotková matice se značí *I* nebo také *J*.

Př. $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 8 & 7\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Vynásobením matic ověříme vlastnost jednotkové matice

$$A\cdot I=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 8 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 8 & 7\end{pmatrix}$$

Pozn. Jednotková matice při násobení komutuje (nezáleží na tom, v jakém pořadí nasobíme)

$$I\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -4\\ 8 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 8 & 7\end{pmatrix}$$

Pokud je matice *A* vyššího řádu, je i příslušná jednotková matice větší.

Př. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A\cdot I=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},\quad I\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$