Lineární algebra
(lineární kombinace, závislost, nezávislost, matice, hodnost matic)

Úvod: Startovní kapitola vysokoškolské matematiky. Seznámíte se se základními pojmy lineární algebry-lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost, matice a jejich hodnost.

Co je potřeba umět: Jedná se o úvodní kapitolu, proto jsou zapotřebí jen elementární znalosti, které představují sčítání, odčítání a řešení soustav rovnic o několika neznámých.

Vektorem budeme rozumět uspořádanou *n*-tici reálných čísel.

$u=(2;-1)$ píšeme, že $u\in\mathbb{R}^2$ nebo $u\in\mathbb{V}_2$ (V_2 je značení na VŠE)

je to dvojice reálných čísel

vektor $v=(3;4;-3)$ splňuje $v\in\mathbb{R}^3$ $v\in\mathbb{V}_3$; je to tedy trojice reáných čísel

atd.

Stejně jako čísla, můžeme vektory násobit libovolným reálným číslem a můžeme je sčítat.

Př. pokud $u=(-2;3)$ pak $4\cdot u=(-8;12)$

pokud $u=(4;1)$ a $v=(1;-2)$ pak $3\cdot u+2\cdot v=(12;3)+(2;-4)=(14;-1)$

Sčítat lze pouze vektory ze stejného prostoru, tedy stejného typu.

nelze tedy sečíst např. $(-8;4)+(-4;1;3)$

V příkladu jsme viděli, že vektor $(14;-1)$ jistým způsobem vznikl z vektorů $(4;1)$ a $(1;-2)$. Stačilo první vektor vynásobit číslem 3, druhý vektor číslem 2 a výsledky sečíst.

Vektor $(14;-1)$ je **lineární kombinací** vektorů $(4;1)$ a $(1;-2)$. Čísla *3* a *2* (kterými jsme násobili) jsou koeficienty lineární kombinace

<u>Definice</u> Vektor *v* je lineární kombinací vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_N$

pokud existují reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_N$

tak, že $v=c_1\cdot u_1+c_2\cdot u_2+\ldots+c_n\cdot u_n$

čísla $c_1, c_2, \ldots, c_N$ nazýváme koeficienty lineární kombinace

<u>Pozn.</u> Pro větší přehlednost se někdy vektory zapisují sloupcově

tedy např. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ atd.

Př. Rozhodněte, zda je vektor $w = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$ lineární kombinací vektorů $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(my víme, že je, ale jak se na to přijde, když to nevíme)

hledáme čísla c_1 a c_2 tak, že $w = c_1 \cdot u + c_2 \cdot v$ tedy:

$\begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ proto řešíme soustavu rovnic:

$$14 = c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot 1$$
$$-1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot (-2)$$

$$14 = 4 \cdot c_1 + c_2 \qquad / \cdot 2 \qquad (*)$$
$$-1 = c_1 - 2 \cdot c_2$$

$$28 = 8 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2$$
$$-1 = c_1 - 2 \cdot c_2$$

$$27 = 9 \cdot c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3$$

ze vztahu (*): $c_2 = 14 - 4 \cdot c_1 = 14 - 4 \cdot 3 = 14 - 12 = 2$

koeficienty jsou tak $c_1 = 3$, $c_2 = 2$

Zkouška: $3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$ a to jsme chtěli

Odpověď: Vektor *w* je lineární kombinací vektorů u , v

Př. a) Rozhodněte, zda je vektor $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

lineární kombinací vektorů $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$