5. Rozhodněte, zda zobrazení f je prosté, jestliže zobrazení f je definováno tabulkou

x	-20	-17	-14	-13	-2	8	9	10	11	12
f(x)	12	11	13	8	9	4	2	4	11	0

Pokud zobrazení f není prosté, určete všechny podmnožiny množiny D(f), v nichž je zobrazení f prosté.

Řešení:

Zobrazení f není prosté, toto zobrazení je prosté v každé podmnožině definičního oboru (tj. množiny A), která současně neobsahuje prvky -17 a 11 a současně neobsahuje 8 a 10.

Stačí si opět vzpomenout na definici 2. 1. prostého zobrazení :
Řekneme, že f je **prosté zobrazení** množiny A do množiny B, jestliže
(i) f : A —> B a
(ii) $\forall_{x_1 \in A} \forall_{x_2 \in A} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

Především musíme zkontrolovat splnění části (ii), která říká, že různým vzorům, musí být přiřazeny různé obrazy.

To, že se v zobrazení f opravdu vyskytují různé vzory, je vidět v 1. řádku tabulky. Zde jsou prvky z definičního oboru f vždy pouze jedenkrát.

Ale v 2. řádku se prvky 11 a 4 vyskytují dvakrát, tedy existují dvě dvojice uspořádaných čísel [-17,11], [11,11] a [8,4], [10,4] , ve kterých se vyskytují různém vzory (-17 a 11, resp. 8 a 10), ale stejné obrazy (11, resp. 4).
Proto zobrazení f není prosté v celém definičním oboru, ale je prosté v každé podmnožině definičního oboru která současně neobsahuje prvky -17 a 11 a současně neobsahuje 8 a 10.

---

6. Rozhodněte, zda k zobrazením ze cvičení 4. a 5. existují inverzní zobrazení.

Řešení:

K zobrazení ze 4. cvičení existuje inverzní zobrazení, ale k zobrazení z 5. cvičení inverzní zobrazení neexistuje, protože toto zobrazení není prosté.

Připomeňme si definici 2. 1. 6 inverzního zobrazení :
Nechť f je prosté zobrazení množiny A na množinu B.
Řekneme, že g je **inverzní zobrazení** k zobrazení f, jestliže $g = \{[x,y]; [y,x] \in f\}$.

Vidíme, že k zobrazení f existuje inverzní zobrazení pouze tehdy, je-li zobrazení f prosté. Z výsledků cvičení 4. a 5. víme, které z nich je prosté a tady ke kterému existuje inverzní zobrazení.

---

7. Určete sup(M), inf(M), max(M) a min(M), jestliže je množina M definována předpisem:

Nejdříve si připomeňme definice maxima, minima, supréma a infima:

Nechť M je množina taková, že $M \subset R^*$. Nechť *a* a *b* jsou zobecněná reálná čísla.
Řekneme, že
(i) a je **maximum množiny** M, jestliže $a \in M$ a a je horní závora množiny M,
(ii) b je **minimum množiny** M, jestliže $b \in M$ a b je dolní závora množiny M.

inf(M) = -∞, min(M) neexistuje

Nechť M je množina taková, že M $\subset R^*$. Nechť *a* a *b* jsou zobecněná reálná čísla. Řekneme, že

(i) *a* je **suprémum množiny** M, jestliže *a* je nejmenší horní závora množiny M,

(ii) *a* je **infimum množiny** M,jestliže *a* je největší dolní závora množiny M.

(a) $M = \{n^2, n \in N_0\}$

$M = \{0, 1, 4, 9, 16 ...\}$

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,
inf(M) = min(M) = 0

(b) $M = R^*$

Řešení:
sup(M) = max(M) = ∞,
inf(M) = min(M) = -∞

Všimněte si rozdílu v řešení příkladů (b) a (c). Množina $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$!

(c) $M = R$

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,
inf(M) = -∞, min(M) neexistuje

(d) $M = Z - N$

Jedná se vlastně o celá záporná čísla včetně 0.

Řešení:
sup(M) = max(M) = 0,
inf(M) = -∞, min(M) neexistuje

(e) $M = (0,5) \cup \{7\} \cup (8,9)$

Řešení:
sup(M) = max(M) = 9,
inf(M) = 0, min(M) neexistuje

(f) $M = Z$

Všimněte si stejného řešení u příkladů (c) a (f), přestože se jedná o rozdílné množiny !

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,
inf(M) = -∞, min(M) neexistuje

(g) $M = \left\{\frac{1}{n^2}, n \in N\right\}$

$M = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...\right\}$

Řešení:
sup(M) = max(M) = 1,
inf(M) = 0, min(M) neexistuje

(h) $M = R - Q$

Jedná se o tzv. iracionální čísla, tj. reálná čísla *x*, pro které neplatí: $\underset{p \in Z - \{0\}}{\exists} \underset{q \in Z}{\exists} \left(x = \frac{q}{p}\right)$ (tj. nelze je vyjádřit jako podíl dvou celých čísel, kromě případu, že *p*=1)

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,

(i) $M = \{7\} \cup (0,5)$

Řešení:
sup(M) = max(M) = 7,
inf(M) = 0, min(M) neexistuje

Jedná se o otevřený interval sjednocený s jednoprvkovou množinou obsahující číslo 7, tedy 7 je určitě největší hodnota.
Dolní hranicí intervalu je 0, která tam však nepatří !

(j) $M = Q$

Množina racionálních čísel (viz definice 2.2.3)

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,
inf(M) = -∞, min(M) neexistuje

(k) $M = \{n!, n \in N_0\}$

$M = \{0, 1, 2, 6, 24, 120, ...\}$

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,
inf(M) = min(M) = 0

(l) $M = R^* - Q$

Jedná se o iracionální čísla (viz výše příklad h), ke kterým je navíc $\pm\infty$.
Množina $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$!

Řešení:
sup(M) = max(M) = ∞,
inf(M) = min(M) = -∞

(m) $M = \{-1\} \cup (0,5)$

Jedná se o otevřený interval sjednocený s jednoprvkovou množinou obsahující číslo -1, tedy -1 je určitě nejmenší hodnota.
Horní hranicí intervalu je 5, která tam však nepatří !

Řešení:
sup(M) = 5, max(M) neexistuje,
inf(M) = min(M) = -1

(n) $M = N$

Množina všech přirozených čísel (bez 0).

Řešení:
sup(M) = max(M) = ∞,
inf(M) = min(M) = 1

(o) $M = \{n!, n \in N\}$

$M = \{1, 2, 6, 24, 120, ...\}$
Srovnej s příkladem (k).

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,
inf(M) = min(M) = 1

(p) $M = R - Z$

Množina reálných čísel kromě čísel celých.

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,

(q) $M = \{-8, 9, 11, 3, 4, -20, 0\}$

Stačí si prvky této množiny uspořádat podle velikosti (vzestupně).

Řešení:
sup(M) = max(M) = 9,
inf(M) = min(M) = -20

(r) $M = N_0$

Množina všech přirozených čísel (včetně 0).

Řešení:
sup(M) = ∞, max(M) neexistuje,
inf(M) = min(M) = 0

(s) $M = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in N \right\}$

$M = \left\{ -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \dots \right\}$

Rozdělíme prvky množiny M na dvě části:

a) pro n liché $\left\{ -1, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{7} \dots \right\}$
b) pro n sudé $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \dots \right\}$

Lépe je pak vidět, že minimem a tedy i infimem je -1 a maximem a tedy i suprémem je $\frac{1}{2}$.

Řešení:
sup(M) = max(M) = $\frac{1}{2}$,
inf(M) = min(M) = -1

(t) $M = R^* - Z$

Množina reálných čísel kromě čísel celých, ke kterým je navíc $\pm\infty$.
Množina $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$!

Řešení:
sup(M) = max(M) = ∞,
inf(M) = min(M) = -∞