3.4 Posloupnosti

3.4.1 ***Definice***: Nechť A je množina. Řekneme, že a je *posloupnost obsažená v množině* A, jestliže a je zobrazení takové, že

$$D(a) = N \quad \text{a} \quad H(a) \subset A.$$

Poznámka. Je-li A je množina, potom a je posloupnost obsažená v množině A právě tehdy, jestliže a: $N \longrightarrow A$.

ÚMLUVA. Je-li a posloupnost obsažená v množině A, potom pro každé kladné přirozené číslo n zpravidla píšeme a_n místo $a(n)$ a posloupnost a zapisujeme (a_n) nebo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, tedy $a = (a_n) = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Poznámka. Je-li (a_n) posloupnost obsažená v množině A, potom pro každé kladné přirozené číslo n nazýváme a_n *n-tý člen posloupnosti* (a_n).

Poznámka. Je-li (a_n) posloupnost obsažená v množině A, potom $\{a_n, n \in N\}$ označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $\{a_n, n \in N\} = H((a_n))$. Např. $\left\{(-1)^n, n \in N\right\} = \{-1, 1\}$ je množina všech členů posloupnosti $\left((-1)^n\right)$.

ÚMLUVA. Jako posloupnosti obsažené v množině A budeme uvažovat také zobrazení množiny N_0 do množiny A a také zobrazení množiny $N - K$ do množiny A, kde K je konečná podmnožina množiny N.

3.4.2 ***Definice***: Řekneme, že (a_n) je *reálná* (resp. *komplexní*) *posloupnost*, jestliže (a_n) je posloupnost obsažená v množině všech reálných (resp. komplexních) čísel R (resp. C).

Poznámka. Je-li (a_n) reálná posloupnost, potom (a_n) je také funkce jedné proměnné, protože $D((a_n)) = N \subset R \wedge H((a_n)) \subset R$, tudíž pro reálné posloupnosti platí vše, co jsme uvedli pro funkce jedné proměnné (mj. graf reálné posloupnosti, rostoucí, klesající, ryze monotónní, neklesající, nerostoucí, monotónní, shora omezená, zdola omezená a omezená posloupnost, jakož i maximum, minimum, suprémum, infimum posloupnosti).

Poznámka. Nechť (a_n) je reálná posloupnost, potom posloupnost (a_n) je

(i) rostoucí (resp. klesající) právě tehdy, jestliže $\underset{n\in N}{\forall} (a_n < a_{n+1})$ (resp. $\underset{n\in N}{\forall} (a_n > a_{n+1})$,

(ii) neklesající (resp. nerostoucí) právě tehdy, jestliže $\underset{n\in N}{\forall} (a_n \le a_{n+1})$ (resp. $\underset{n\in N}{\forall} (a_n \ge a_{n+1})$.

Poznámka. Nechť (a_n) je reálná posloupnost.

(i) Je-li posloupnost (a_n) neklesající, potom $\inf((a_n)) = \min((a_n)) = a_1$.

(ii) Je-li posloupnost (a_n) nerostoucí, potom $\sup((a_n)) = \max((a_n)) = a_1$.

Tzn. každá neklesající (nerostoucí) reálná posloupnost je vždy zdola (resp. shora) omezená.

ZNAČENÍ. Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti. Potom symbolem $(a_n) \le (b_n)$ označujeme tvrzení $\underset{n\in N}{\forall} (a_n \le b_n)$.

Poznámka. Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti takové, že $(a_n) \le (b_n)$.

(i) Je-li posloupnost (b_n) shora omezená, potom je posloupnost (a_n) rovněž shora omezená.

(ii) Není-li posloupnost (a_n) shora omezená, potom posloupnost (b_n) rovněž není shora omezená.

(iii) Je-li posloupnost (a_n) zdola omezená, potom je posloupnost (b_n) rovněž zdola omezená.
(iv) Není-li posloupnost (b_n) zdola omezená, potom posloupnost (a_n) rovněž není zdola omezená.

Poznámka. Grafem posloupnosti jsou izolované body.

3.4.3 ***Definice***: Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti obsažené v množině *A*.
Řekneme, že posloupnost (b_n) je vybraná z posloupnosti (a_n), jestliže existuje rostoucí posloupnost kladných přirozených čísel (k_n) taková,
že $\forall_{n \in N} \left(b_n = a_{k_n} \right)$.

Poznámka. Je-li (a_n) posloupnost obsažená v množině *A*, potom posloupnost (a_n) je vybraná z posloupnosti (a_n), tedy každá posloupnost je sama ze sebe vybrána, neboť stačí zvolit (k_n) = (n), tj. v roli posloupnosti (k_n) volíme identické zobrazení I_N .

Poznámka. Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti takové, že posloupnost (b_n) je vybrána z posloupnosti (a_n).
(i) Je-li posloupnost (a_n) shora omezená, potom je posloupnost (b_n) rovněž shora omezená.
(ii) Není-li posloupnost (b_n) shora omezená, potom posloupnost (a_n) rovněž není shora omezená.
(iii) Je-li posloupnost (a_n) zdola omezená, potom je posloupnost (b_n) rovněž zdola omezená.
(iv) Není-li posloupnost (b_n) zdola omezená, potom posloupnost (a_n) rovněž není zdola omezená.
(v) Je-li posloupnost (a_n) omezená, potom je posloupnost (b_n) rovněž omezená.
(vi) Není-i posloupnost (b_n) omezená, potom posloupnost (a_n) rovněž není omezená.
(vii) Je-li posloupnost (a_n) rostoucí (resp. klesající, resp. nerostoucí, resp. neklesající), potom je posloupnost (b_n) rovněž rostoucí (resp. klesající, resp. nerostoucí, resp. neklesající).
(viii) Není-li posloupnost (b_n) rostoucí (resp. klesající, resp. nerostoucí, resp. neklesající), potom posloupnost (a_n) rovněž není rostoucí (resp. klesající, resp. nerostoucí, resp. neklesající).
(ix) Je-li posloupnost (a_n) ryze monotónní (resp. monotónní), potom je posloupnost (b_n) rovněž ryze monotónní (resp. monotónní).
(x) Není-li posloupnost (b_n) ryze monotónní (resp. monotónní), potom posloupnost (a_n) rovněž není ryze monotónní (resp. monotónní).
(xi) Obsahuje-li posloupnost (a_n) alespoň jednu rostoucí a alespoň jednu klesající vybranou posloupnost, potom posloupnost (a_n) není ryze monotónní, ani monotónní.

Poznámka. Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti. Potom posloupnost (b_n) je vybraná posloupnost z posloupnosti (a_n) právě tehdy, jestliže posloupnost (b_n) je složené zobrazení vnější posloupnost (a_n) a vnitřní posloupnosti (k_n), kde (k_n) je rostoucí posloupnost kladných přirozených čísel.

Poznámka. Posloupnosti lze také definovat tzv. rekurentně.
Např. uvažujme reálnou posloupnost definovanou takto:
$\forall_{n \in N} \left(a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \right) \wedge a_1 = 1 \wedge a_2 = 1$ (Fibonacciova posloupnost).

Z této definice umíme spočítat, že $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, \ldots$. rekurentní definice je nevhodná, protože pro výpočet například a_{1000} potřebujeme znát všech 999 předchozích členů.
V části věnované diferenčním rovnicím uvedeme, jak určit předpis pro přímý výpočet n-tého členu, známe-li rekurentní definici posloupnosti.