Predikátový počet

1.2.4.***Definice*****:** Nechť M je množina.

Řekneme, že α (x) je **predikát s volnou proměnnou** x na množině M, jestliže platí:

dosadíme-li za x v α (x) libovolný prvek c množiny M, potom α (c) je výrok (ať již pravdivý nebo nepravdivý).

Poznámka. Někdy se místo termínu „predikát s volnou proměnnou"používá termín „výroková forma" nebo „podmínka s volnou proměnnou" či „ unární predikát".

ZNAČENÍ. Predikáty budeme značit také malými písmeny malé řecké abecedy α, β,γ, .. s vyznačením proměnné nebo proměnných.

Je-li α (x) predikát s volnou proměnnou na množině M; symbolem $\{x; x \in M \wedge \alpha(x)\}$ označíme množinu všech prvků x z M, pro které je α (x) pravdivé.

Uvažujeme-li množinu $\{x; x \in M \wedge \alpha(x)\}$, zajímá nás, kdy je tato množina prázdná, neprázdná, kdy je totožná s M. Tyto skutečnosti lze vyjádřit **kvantifikátory**:

Jestliže $\{x; x \in M \wedge \alpha(x)\}$=M, potom tuto skutečnost **zapíšeme** $\underset{x\in M}{\forall}(\alpha(x))$ a čteme „pro všechna x z množiny M je α (x) pravdivé." Symbol $\forall$ **je obecný** (nebo **univerzální** nebo **velký**) **kvantifikátor.**

Jestliže $\{x; x \in M \wedge \alpha(x)\} \neq \theta$, potom tuto skutečnost **zapíšeme** $\underset{x\in M}{\exists}(\alpha(x))$ a čteme „existuje (alespoň jedno) x z množiny M takové, že je α (x) pravdivé" nebo „pro některé x z množ. M je α (x) (pravdivé") . Symbol $\exists$ **je existenční** (nebo **malý**) **kvantifikátor.**

1.2.5 ***Definice*****:** Indukcí podle složitosti definujeme **formule predikátového počtu**:

(i) Každý predikát je formule predikátového počtu.

(ii) Jsou-li α a β formule predikátového počtu, potom $\neg\,\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$ a $\alpha \Leftrightarrow \beta$ jsou rovněž formule predikátového počtu.

(iii) Je-li α formule predikátového počtu a x proměnná, potom $\underset{x}{\forall}\alpha$ a $\underset{x}{\exists}\alpha$ jsou rovněž formule predikátového počtu.

(iii) Všechny formule predikátového počtu vznikají konečným počtem aplikací pravidel (i), (ii) a (iii).

Poznámka. uvažujeme-li formuli φ (resp.Φ) predikátového počtu takovou, že $\varphi = \underset{x\in M}{\forall}\alpha$ (resp. formuli $\phi = \underset{x\in M}{\exists}\alpha$), kde α je formule predikátového počtu, potom řekneme, že *proměnná x je ve formuli φ (resp.Φ) vázaná*. Vyskytuje-li se proměnná ve formuli predikátového počtu a není vázaná kvantifikátorem, potom se nazývá *volná proměnná* v této formuli.

1.2.6 ***Definice***: **Tautologie** (predikátového počtu) je každá formule predikátového počtu, která je vždy pravdivá.

1.2.7 ***Věta (o tautologiích predikátového počtu):***

Nechť α (x) je predikátová formule na množině M.

Potom formule

(i) $\forall_{x\in M} (\alpha(x)) \Leftrightarrow \neg \exists_{x\in M} \neg (\alpha(x))$,

(ii) $\exists_{x\in M} (\alpha(x)) \Leftrightarrow \neg \forall_{x\in M} \neg (\alpha(x))$,

(iii) $\forall_{x\in M} \neg (\alpha(x)) \Leftrightarrow \neg \exists_{x\in M} (\alpha(x))$,

(iv) $\exists_{x\in M} \neg (\alpha(x)) \Leftrightarrow \neg \forall_{x\in M} (\alpha(x))$

jsou formule predikátového počtu.

Poznámka. Ve formulích predikátového počtu záleží na pořadí kvantifikátorů.