Jak určit člen binomického rozvoje

Zadání: **Jakému číslu je roven koeficient u x^4 v binomickém rozvoji:**

$$\left(4x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{11}, \text{ kde } x \neq 0.$$

1. krok:

Uvedeme obecný binomický rozvoj:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

V naší úloze postačí pracovat s obecným členem binomického rozvoje: $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

2. krok:

Promyslíme si, co je v našem výpočtu co:

$$a = 4x^2$$

$$b = -\frac{1}{2x}$$

$$n = 11$$

Dosadíme do obecného členu:

$$\binom{11}{k}\left(4x^2\right)^{11-k}\left(-\frac{1}{2x}\right)^k$$

3. krok:

Nutně potřebujeme zjistit hodnotu *k*. Z výrazu stačí vytahat mocniny *x*. Součin mocnin upravíme a sestavíme exponenciální rovnici podle požadavku ze zadání.

$$\left(x^2\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = x^{22-2k} \cdot x^{-k} = x^{22-2k-k} = x^{22-3k}$$

Rovnice:

$$x^{22-3k} = x^4$$

$$22 - 3k = 4$$

$$3k = 18$$

$$k = 6$$

Jistým potvrzením správnosti je, že nám vyšlo celé kladné číslo. Nic jiného vyjít nemůže.

4. krok:

Vypočtené k dosadíme do obecného členu:

$$\binom{11}{k}\left(4x^2\right)^{11-k}\left(-\frac{1}{2x}\right)^k=\binom{11}{6}\left(4x^2\right)^{11-6}\left(-\frac{1}{2x}\right)^6=\binom{11}{6}\left(4x^2\right)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^6=$$

$$=\binom{11}{6}\cdot\frac{2^{10}\cdot x^{10}}{2^6\cdot x^6}=2^4\cdot\binom{11}{5}\cdot x^4$$

Kombinační číslo upravíme podle vztahu $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

5. krok:

Koeficient u x^4 je $2^4\cdot\binom{11}{5}$

Kdyby nebylo úkolem zjistit koeficient, ale určit, u kolikátého členu rozvoje x^4 vznikne, tak vycházíme z hodnoty k. První člen rozvoje má $k = 0$, druhý má $k = 1$, třetí $k = 2$. Jestli nám vyšlo $k = 6$, jedná se o **sedmý člen rozvoje**.