Jak řešit exponenciální rovnice přes kvadratickou

Zadání: **Řeš v množině reálných čísel rovnici:** $\mathbf{4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0}$

1. krok:

Zde si musíme opět pomoci substitucí neboli náhradou. A to velice rafinovanou. Posuďte:

$2^x = k$

$4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2 = k^2$

Bystrý a zkušený řešitel zahlédne kvadratickou rovnici hned prvním pohledem a podobně by to bylo v rovnicích, kde bude 3^x a 9^x nebo 5^x a 25^x, zkrátka když základy jsou ve vztahu druhé mocniny.

$$4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$$
$$k^2 - 12 \cdot k + 32 = 0$$

Využili jsme vzorec: $\left(a^s\right)^t = \left(a^t\right)^s = a^{s \cdot t}$

2. krok:

Vyřešíme kvadratickou rovnici:

$$k_{1;2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2}$$
$$k_1 = 4$$
$$k_2 = 8$$

3. krok:

Nyní se posuneme k jednoduchým exponenciálním rovnicím a řešení dokončíme:

$$2^x = 4 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2$$
$$2^x = 8 \quad \rightarrow \quad x_2 = 3$$