

Nekonečné řady

Mějme posloupnost $a_n = a_1, a_2, a_3, \dots$

Symbol $\sum_{n=1}^k a_n$ znamená součet prvních k členů

Tedy $\sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$

Nebo konkrétní příklad: $\sum_{n=1}^5 a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

My se ale nyní budeme zabývat tím, co dostaneme, když sečteme všechny členy posloupnosti.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Co přesně tento symbol znamená?

Pokud označíme $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$ součet prvních k členů

Pak $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$

Jednoduché příklady

Př. $a_n = 0$

Tedy $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $a_3 = 0$

Pak zřejmě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$

Př. $a_n = n$

Tedy $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 3$ $a_4 = 4$ $a_5 = 5$

Tedy:

$$s_1 = 1 \quad s_2 = \sum_{n=1}^2 a_n = 1 + 2 = 3 \quad s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad s_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Neustále tedy přičítáme větší a větší čísla.

$$\text{Zřejmě je } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

Pokud máme tedy nějakou posloupnost a_n , tak chceme rozhodnout, zda její součet je konečné číslo (případně to číslo i určit, ale to je obecně těžké). V tom případě říkáme, že řada **konverguje**.

$$\text{Tedy } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Případně zda ten součet neexistuje a nebo roste nade všechny meze. Říkáme pak, že řada **diverguje**.

Představíme si tedy nějaká pravidla, která nám o konvergenci (případně divergenci) rozhodují.

Nejprve ale některé důležité řady.

Geometrická řada

To je řada tvořená geometrickou posloupností. Tedy platí, že $a_{n+1} = q \cdot a_n$

$q \in \mathbb{R}$ - kvocient

Př. $a_1 = 1$ $q=2 \Rightarrow a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 4$ $a_4 = 8$ $a_5 = 16$ $a_6 = 32$ $a_7 = 64 \dots$

$$\text{Př. } a_1 = 2 \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{1}{4} \quad a_5 = \frac{1}{8} \quad a_6 = \frac{1}{16} \quad a_7 = \frac{1}{32} \dots$$

Víme (ze střední školy), že součet prvních k prvků geometrické posloupnosti, pokud $q \neq 1$, lze spočítat.

$$s_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

Proto, aby řada konvergovala, tak musí existovat:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \text{ a ta existuje jen pro } |q| < 1$$

$$\text{pak } \lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0 \Rightarrow s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \underline{\underline{\frac{a_1}{1-q}}}$$

je-li a_n geometrická posloupnost a $a_1 \neq 0$ pak

$$|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \text{ tedy konverguje}$$

$$|q| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ nebo neexistuje, ale v každém případě diverguje.}$$

$$\text{Př. } a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tedy } a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{4} \quad a_4 = \frac{1}{8} \quad a_5 = \frac{1}{16}$$

$$|q| < 1 \text{ proto}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje a dokonce známe i součet}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

$$\text{Tedy } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

Harmonická řada

Další důležitou řadou je řada z posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$, neboli řada harmonická.

$$\text{Tedy } a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{1}{4} \quad a_5 = \frac{1}{5} \dots$$

Tato řada **diverguje**. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$$\text{Protože: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} + \dots$$

Proto neustále přičítáme čísla větší $\frac{1}{2}$ a tedy součet řady roste nade všechny meze (ano, k tomu, abychom dosáhli hodnoty větší než $\frac{1}{2}$ potřebujeme vždy více a více členů, ale my jich máme k dispozici nekonečně mnoho, takže nám to nevadí.)

Součet prvních	4	členů je tedy více než	2
	8	- -	2,5
	16	- -	3
	32	- -	3,5
	64	- -	4
	128	- -	4,5