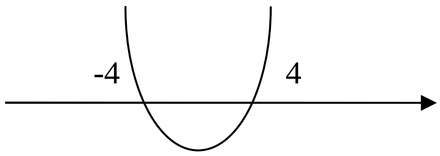
4. Určete definiční obor elementární funkce *g*, jestliže *g* je definována předpisem

a) $g(x)=\sqrt{x^2-16}+\ln(2-x)$

I) Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0,\infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0. Řešíme nerovnici:

$$\begin{aligned} &x^2-16\geq 0 \\ &(x+4).(x-4)\geq 0 \end{aligned}.$$

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou *x* jsou výše nalezené kořeny $x=4$ a $x=-4$. Dále podle kladného znaménka kvadratického koeficientu $(a=1)$ (nerovnice $x^2-16\geq 0$) víme, že je konvexní.



Hledáme, kdy je splněno $x^2-16\geq 0$, tedy kdy graf zasahuje nad osu *x* (včetně průsečíků s osou *x*). Čili $x\in(-\infty,-4\rangle\cup\langle 4,\infty)$.

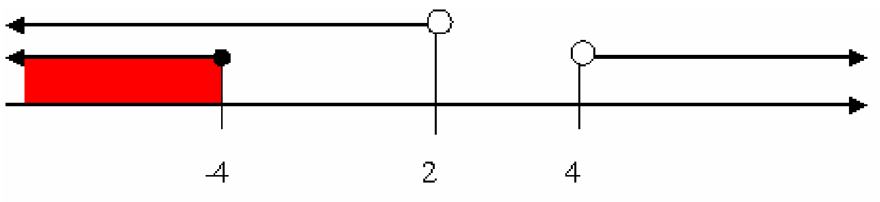
II) Připomeňme si, že definiční obor logaritmické funkce jsou pouze čísla kladná, tj. interval $(0,\infty)$.

Řešíme tedy nerovnici:

$$\begin{aligned} &2-x>0 \\ &2>x \end{aligned},$$

čili $x\in(-\infty,2)$.

Podmínky I) a II) musí platit zároveň, řešíme tedy $\left((-\infty,-4\rangle\cup\langle 4,\infty)\right)\cap(-\infty,2)$



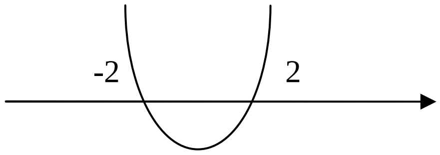
Tedy $D(f)=(-\infty,-4\rangle$.

b) $g(x)=\sqrt[4]{x^2-4}-\log_2(x-15)$

I) Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0,\infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0. Řešíme nerovnici:

$$\begin{aligned} &x^2-4\geq 0 \\ &(x+2).(x-2)\geq 0 \end{aligned}.$$

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou *x* jsou výše nalezené kořeny $x=2$ a $x=-2$. Dále podle kladného znaménka kvadratického koeficientu $(a=1)$ (nerovnice $x^2-4\geq 0$) víme, že je konvexní.



Hledáme, kdy je splněno $x^2 - 4 \geq 0$, tedy kdy graf zasahuje nad osu *x* (včetně průsečíků s osou *x*). Čili $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$.

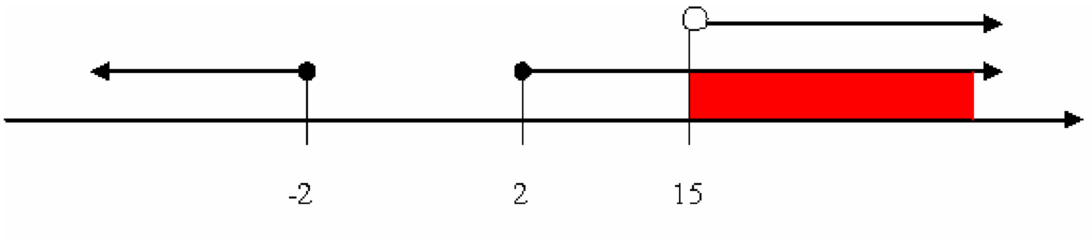
II) Připomeňme si, že definiční obor logaritmické funkce jsou pouze čísla kladná, tj. interval $(0, \infty)$.

Řešíme tedy nerovnici:

$$\begin{aligned} x - 15 &> 0 \\ x &> 15 \end{aligned},$$

čili $x \in (15, \infty)$.

Podmínky I) a II) musí platit zároveň, řešíme tedy $x \in \left(\left((-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)\right) \cap (15, \infty)\right)$



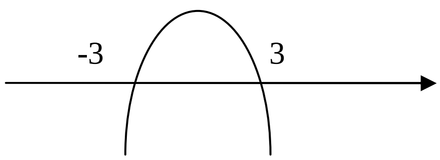
Tedy $D(f) = (15, \infty)$.

c) $g(x) = \sqrt[6]{9 - x^2} + \log_5(x+1)$

I) Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0, \infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0. Řešíme nerovnici:

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &\geq 0 \\ (3+x).(3-x) &\geq 0 \end{aligned}.$$

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou *x* jsou výše nalezené kořeny $x = 3$ a $x = -3$. Dále podle záporného znaménka kvadratického koeficientu $(a = -1)$ (nerovnice $9 - x^2 \geq 0$) víme, že je konkávní.



Hledáme, kdy je splněno $9 - x^2 \geq 0$, tedy kdy graf zasahuje nad osu *x* (včetně průsečíků s osou *x*). Čili $x \in \langle -3, 3 \rangle$.

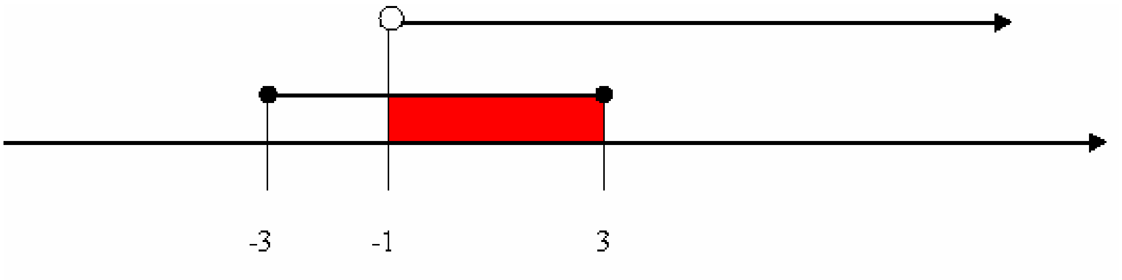
II) Připomeňme si, že definiční obor logaritmické funkce jsou pouze čísla kladná, tj. interval $(0, \infty)$.

Řešíme tedy nerovnici:

$$\begin{aligned} x+1 &> 0 \\ x &> -1 \end{aligned},$$

čili $x \in (-1, \infty)$.

Podmínky I) a II) musí platit zároveň, řešíme tedy $x \in \left(\langle -3, 3 \rangle \cap (-1, \infty) \right)$



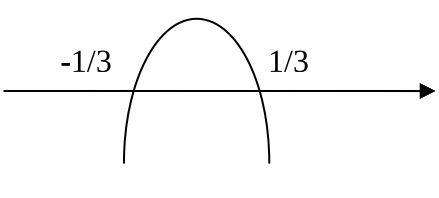
Tedy $D(f) = (-1, 3\rangle$.

d) $g(x) = \sqrt[8]{1 - 9x^2} + \log(2x - 1)$

I) Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0, \infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0. Řešíme nerovnici:

$$\begin{aligned} 1 - 9x^2 &\geq 0 \\ (1+3x).(1-3x) &\geq 0 \end{aligned}.$$

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou *x* jsou výše nalezené kořeny $x = \frac{1}{3}$ a $x = -\frac{1}{3}$. Dále podle záporného znaménka kvadratického koeficientu $(a = -1)$ (nerovnice $1 - 9x^2 \geq 0$) víme, že je konkávní.



Hledáme, kdy je splněno $1 - 9x^2 \geq 0$, tedy kdy graf zasahuje nad osu *x* (včetně průsečíků s osou *x*). Čili $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$.

II) Připomeňme si, že definiční obor logaritmické funkce jsou pouze čísla kladná, tj. interval $\left(0,\infty\right)$.

Řešíme tedy nerovnici:

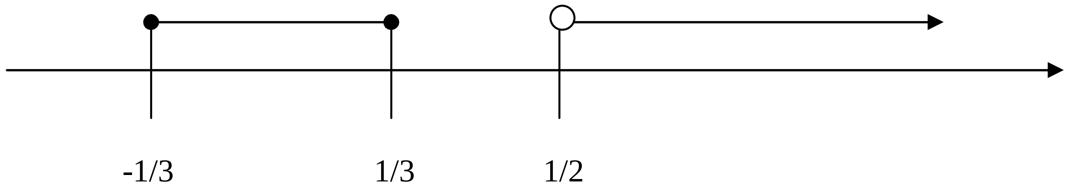
$2x-1>0$

$2x>1$,

$x>\frac{1}{2}$

čili $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

Podmínky I) a II) musí platit zároveň, řešíme tedy $x\in\left(\left\langle -\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\rangle \cap\left(\frac{1}{2},\infty\right)\right)$



Tyto intervaly však žádný průnik nemají, proto $D\left(f\right)=\varnothing$.

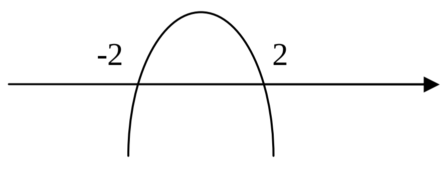
e) $g\left(x\right)=\sqrt[6]{4-x^2}-\log_6 x$

I) Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\left\langle 0,\infty\right)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0. Řešíme nerovnici:

$4-x^2\geq 0$

$\left(2+x\right).\left(2-x\right)\geq 0$

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou *x* jsou výše nalezené kořeny $x=2$ a $x=-2$. Dále podle záporného znaménka kvadratického koeficientu $\left(a=-1\right)$ (nerovnice $4-x^2\geq 0$) víme, že je konkávní.



Hledáme, kdy je splněno $4-x^2\geq 0$, tedy kdy graf zasahuje nad osu *x* (včetně průsečíků s osou *x*). Čili $x\in\left\langle -2,2\right\rangle$.

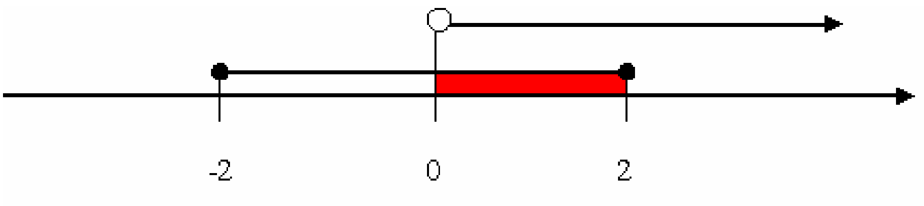
II) Připomeňme si, že definiční obor logaritmické funkce jsou pouze čísla kladná, tj. interval $\left(0,\infty\right)$.

Řešíme tedy nerovnici:

$x>0$,

čili $x \in (0,\infty)$.

Podmínky I) a II) musí platit zároveň, řešíme tedy $x \in \left(\left\langle -2,2 \right\rangle \cap (0,\infty)\right)$



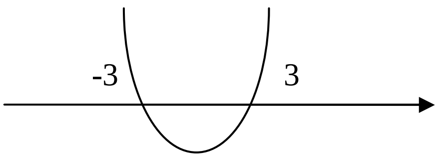
Tyto intervaly však žádný průnik nemají, proto $D(f) = \left(0,2\right\rangle$.

f) $g(x) = \sqrt{x^2-9} - \ln(-x)$

I) Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\left\langle 0,\infty \right)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0. Řešíme nerovnici:

$$x^2-9 \geq 0$$
$$(x+3).(x-3) \geq 0 \, .$$

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou x jsou výše nalezené kořeny $x=3$ a $x=-3$. Dále podle kladného znaménka kvadratického koeficientu $(a=1)$ (nerovnice $x^2-9 \geq 0$) víme, že je konvexní.



Hledáme, kdy je splněno $x^2-9 \geq 0$, tedy kdy graf zasahuje nad osu x (včetně průsečíků s osou x). Čili $x \in \left(-\infty,-3\right\rangle \cup \left\langle 3,\infty\right)$.

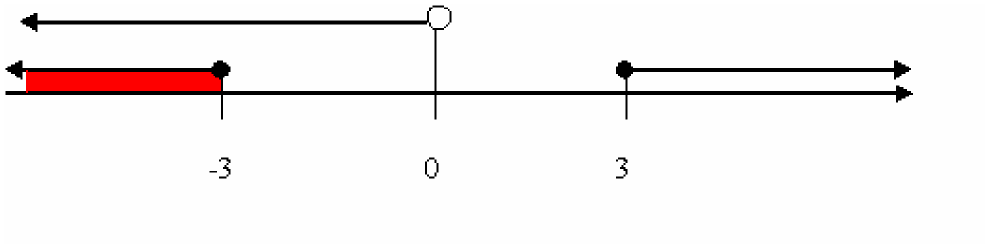
II) Připomeňme si, že definiční obor logaritmické funkce jsou pouze čísla kladná, tj. interval $(0,\infty)$.

Řešíme tedy nerovnici:

$$-x > 0$$
$$x < 0 \, ,$$

čili $x \in (-\infty,0)$.

Podmínky I) a II) musí platit zároveň, řešíme tedy $\left(\left(-\infty,-3\right\rangle \cup \left\langle 3,\infty\right)\right) \cap (-\infty,0)$



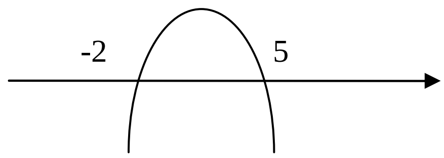
Tedy $D(f) = (-\infty, -3\rangle$.

g) $g(x) = \sqrt{\dfrac{3x - x^2 + 10}{40 + 2x^2}}$

Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0, \infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0. Řešíme nerovnici:

$$\frac{3x - x^2 + 10}{40 + 2x^2} \geq 0.$$

Nejprve určíme nulové body čitatele a jmenovatele.
V čitateli řešíme kvadratickou rovnici $3x - x^2 + 10 = 0$, resp. $x^2 - 3x - 10 = 0$.
Tato rovnice má dva kořeny $x = -2$ a $x = 5$.
Řešíme-li kvadratickou nerovnici pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou *x* jsou výše nalezené kořeny $x = -2$ a $x = 5$. Dále podle záporného znaménka kvadratického koeficientu $(a = -1)$ (první rovnice $-x^2 + 3x + 10 = 0$) víme, že je konkávní.



Čili v intervalech, ve kterých graf zasahuje pod osu *x*, nabývá $-x^2 + 3x + 10$ záporných hodnot a v intervalech, ve kterých zasahuje nad osu *x*, nabývá kladných hodnot.
Ve jmenovateli řešíme

$$40 + 2x^2 = 0$$

Tento výraz ovšem vždy nabývá kladných hodnot (tj. nemá žádné nulové body).

Nyní rozhodneme, ve kterých intervalech nabývá čitatel, resp. jmenovatel kladných, resp. záporných hodnot.
Nakonec určíme znaménko celého zlomku.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 5)$	$(5, \infty)$
$-x^2 + 3x + 10$	-	+	-
$2x^2 + 40$	+	+	+
$\dfrac{3x - x^2 + 10}{40 + 2x^2}$	-	+	-

Protože jsme řešili nerovnici $\frac{3x-x^2+10}{40+2x^2} \geq 0$, zajímají nás intervaly, ve kterých nabývá zlomek $\frac{10+3x-x^2}{x^3-x^2}$ nezáporných hodnot. Tedy $x \in \langle -2,5 \rangle$

Všimněte si, že interval je uzavřený, protože obě hodnoty ($x=-2$ a $x=5$) jsou nulové body čitatele, který se vynulovat může, protože jsme řešili neostrou nerovnost (v nerovnici bylo =).
Tedy
$D(f)=\langle -2,5 \rangle$.