1. Spočtěte funkční hodnoty

a) využití vzorců $\forall_{x\in(0,\infty)}\left(e^{\ln x}=x\right)\wedge\forall_{x\in(-\infty,\infty)}\left(\ln e^{x}=x\right)$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$\ln\left(\sqrt[7]{\frac{e^{-2}}{e^{-5}}}\right)=\ln\sqrt[7]{e^{-2-(-5)}}=\ln\sqrt[7]{e^{-2+5}}=\ln\sqrt[7]{e^{3}}=\ln e^{\frac{3}{7}}=\frac{3}{7}$$

$$\ln\left(\frac{e^{4}}{e^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln\left(e^{4-(-3)}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln\left(e^{7}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln e^{7.\frac{1}{2}}=\ln e^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$$

využití vztahů $\forall_{x\in(0,\infty)}\forall_{y\in(0,\infty)}\left(\log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y\right)\wedge\forall_{x\in(0,\infty)}\forall_{y\in R}\left(\log_a\left(x^{y}\right)=y\log_a x\right)$

$$\ln\sqrt{e^{-3}}+\ln\sqrt[8]{e^{-2}}=\ln\left(\sqrt{e^{-3}}.\sqrt[8]{e^{-2}}\right)=\ln\theta\left(e^{-\frac{3}{2}}.e^{-\frac{2}{8}}\right)=\ln e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}=\ln e^{\frac{-6-1}{4}}=\ln e^{-\frac{7}{4}}=-\frac{7}{4}$$

využití $\log_a 1=0$

$$\ln 1-\ln\sqrt{e}=0-\ln e^{\frac{1}{2}}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\ln\sqrt[6]{\frac{e^{5}}{\sqrt{e}}}=\ln\left(\frac{e^{5}}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\ln\left(e^{5-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=\ln\left(e^{\frac{10-1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=\ln\left(e^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=\ln e^{\frac{9}{2}.\frac{1}{6}}=\ln e^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$$

b) využití $\forall_{x\in(0,\infty)}\left(a^{\log_a x}=x\right)\wedge\forall_{x\in(-\infty,\infty)}\left(\log_a a^{x}=x\right)$

$$\log_{100}\left(\frac{1}{10000}\right)=\log_{100}\left(\frac{1}{100^{2}}\right)=\log_{100}100^{-2}=-2.\log_{100}100=-2.1=-2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}16=\log_{\frac{1}{2}}2^{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=-4.\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=-4.1=-4$$

$$\log_{100}\frac{1}{10}=\log_{100}10^{-1}=$$

$$=\log_{100}\left(\sqrt{100}\right)^{-1}=\log_{100}\left(100^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}=\log_{100}100^{\frac{1}{2}.(-1)}=\log_{100}100^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}.\log_{100}100=-\frac{1}{2}.1=-\frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}2=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{-1}=$$

$$=\log_{\frac{1}{4}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}.(-1)}=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}.\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.1=-\frac{1}{2}$$

$$\log_{100}\frac{1}{1000}=\log_{100}\frac{1}{10^{3}}=\log_{100}10^{-3}=\log_{100}\left(\sqrt{100}\right)^{-3}$$

$$==\log_{100}\left(100^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}=\log_{100}100^{\frac{1}{2}.(-3)}=\log_{100}100^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}.1=-\frac{3}{2}$$

c) využití tabulky funkčních hodnot a lichosti funkce arcsin x, tj. arcsin(-x)=-arcsin(x)

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$$\arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(-\frac{3}{2\sqrt{3}}\right) = -\arcsin\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

d) využití tabulky funkčních hodnot – viz. výše

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(-\frac{3}{2.3}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

e) využití tabulky funkčních hodnot

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctg x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arccotg x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

f) využití tabulky funkčních hodnot – viz. výše

$$\operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arccotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arccotg}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arccotg}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arccotg}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = \operatorname{arccotg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

2. Užitím vztahu mezi obecnými a základními exponenciální funkcí (tedy užitím: $e^{x.\ln a} = a^x$, $\exp(x.\ln a) = \exp_a x$) převeďte funkci f na základní funkci exp, jestliže

a) $f(x) = 3^x = e^{x.\ln 3}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x = e^{x.\ln\frac{1}{4}} = e^{x.\ln(4)^{-1}} = e^{x.(-1)\ln 4} = e^{-x.\ln 4}$

c) $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{x.\ln\frac{1}{x}}=e^{x.\ln(x)^{-1}}=e^{x.(-1)\ln x}=e^{-x.\ln x}$

d) $f(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x}=e^{x.\ln\frac{1}{x-1}}=e^{x.\ln(x-1)^{-1}}=e^{x.(-1)\ln(x-1)}=e^{-x.\ln(x-1)}$

e) $f(x)=7^{2x}=e^{2x.\ln 7}$

f) $f(x)=\left(\frac{1-x}{2}\right)^{x}=e^{(x-1).\ln\left(\frac{1-x}{2}\right)}$

g) $f(x)=\left(\frac{1}{2-x}\right)^{1-x}=e^{(1-x).\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)}=e^{(1-x).\ln(2-x)^{(-1)}}=e^{(1-x).(-1)\ln(2-x)}=e^{(x-1).\ln(2-x)}$

h) $f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x^2}=e^{x^2.\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$

i) $f(x)=x^{2x}=e^{2x.\ln x}$

j) $f(x)=\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)}$

k) $f(x)=\left(\frac{x}{2-x}\right)^{2-x}=e^{(2-x).\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)}$

l) $f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}.\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$

3. Určete definiční obor elementární funkce f, jestliže je f definována předpisem:

a) $f(x)=\frac{2}{x-2}$

Uvědomíme si definovanost funkční operace podíl, čili jmenovatel se nesmí rovnat nule:

$x-2\neq 0$

$x\neq 2$

$D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

b) $f(x)=\frac{3-x}{x+4}$

Uvědomíme si definovanost funkční operace podíl, čili jmenovatel se nesmí rovnat nule:

$x+4\neq 0$

$x\neq -4$

$D(f)=(-\infty,-4)\cup(-4,\infty)$

c) $f(x)=\dfrac{5+2x}{x^2-4}$

Uvědomíme si definovanost funkční operace podíl, čili jmenovatel se nesmí rovnat nule:

$x^2-4\neq 0$

$(x-2).(x+2)\neq 0$

$x\neq 2, x\neq -2$

$D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

d) $f(x)=\dfrac{3}{2x^2+7}$

Uvědomíme si definovanost funkční operace podíl, čili jmenovatel se nesmí rovnat nule:

$2x^2+7\neq 0$

$2x^2\neq -7$

Tato rovnice nemá v R řešení (jmenovatel je vždy kladný) a proto $D(f)=R$.

e) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$

Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0,\infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0.

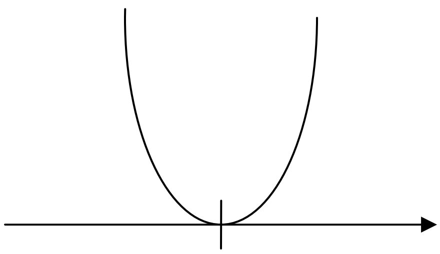
$x^2+4x+4\geq 0$

$(x+2)^2\geq 0$

Máme dvojnásobný kořen $x=-2$.

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že x-ová souřadnice vrcholu je $x=-2$.

Dále podle kladného znaménka kvadratického koeficientu $(a=1)$ víme, že je konvexní.



-2

Vidíme, že graf nezasahuje pod osu x, neboli funkce nabývá pouze nezáporných hodnot, tedy nerovnice $x^2+4x+4\geq 0$ je vždy splněna. Proto $D(f)=R$.

f) $f(x)=\sqrt[4]{-x^2+8x-12}$

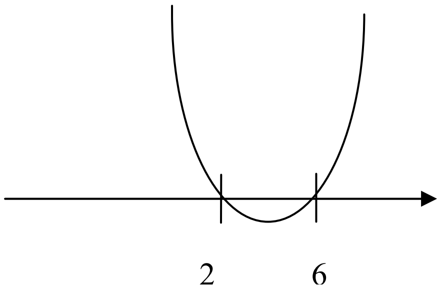
Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0,\infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0.

$-x^2+8x-12\geq 0$

$x^2-8x+12\leq 0$

$(x-6).(x-2)\leq 0$

Máme dva kořeny $x=6$ a $x=2$.
Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, vidíme, že průsečíky s osou x jsou výše nalezené kořeny $x=6$ a $x=2$.
Dále podle kladného znaménka kvadratického koeficientu $(a=1)$ (druhá nerovnice) víme, že je konvexní.



Hledáme, kdy je splněno $x^2-8x+12\leq 0$, tedy kdy graf zasahuje pod osu x (včetně průsečíků s osou x). Čili $D(f)=\langle 2,6\rangle$

g) $f(x)=\sqrt[6]{-x^2+3x-5}$

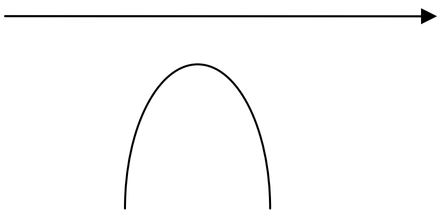
Připomeneme si, že definiční obor sudé odmocniny je interval $\langle 0,\infty)$, tedy výraz pod odmocninou musí být ≥ 0.

$-x^2+3x-5\geq 0$

Pokud bychom hledali kořeny kvadratické rovnice $-x^2+3x-5=0$, zjistíme, že nemá v reálných číslech řešení, protože diskriminant je záporný.

$D=3^2-4.(-1).(-5)=-11$

Řešíme-li kvadratickou nerovnice pomocí grafu kvadratické funkce, tj. paraboly, víme tedy, že neexistuje průsečík s osou x.
Dále podle záporného znaménka kvadratického koeficientu $(a=-1)$ víme, že je konkávní.



Hledáme, kdy je splněno $-x^2+3x-5\geq 0$, tedy kdy graf zasahuje nad osu x (včetně průsečíků s osou x). Ale celý graf je pod osou x, čili $D(f)=\varnothing$.