2.4 Reálné funkce

2. 4. 1 ***Definice***: Řekneme, že f je **reálná funkce**, jestliže f je zobrazení takové, že H(f) $\subset R$.

Poznámka. Tj. reálná funkce f je zobrazení f : A $\longrightarrow R$.

ÚMLUVA. Místo termínu reálná funkce budeme také používat termín funkce, pokud to nepovede k nedorozumění.

2. 4. 2***Definice***: Nechť f a g jsou funkce takové, že D(f) = D(g). Nechť c je reálné číslo.
Potom definujeme

(i) **součet funkcí** f a g, který označíme f + g, předpisem

$$\forall_{x\in D(f)} ((f+g)(x) = f(x)+g(x)),$$

(ii) **rozdíl funkcí** f a g, který označíme f - g, předpisem

$$\forall_{x\in D(f)} ((f-g)(x) = f(x)-g(x)),$$

(iii) c **násobek funkce** f, který označíme c . f, předpisem

$$\forall_{x\in D(f)} ((c\,.\,f)(x) = c\,.\,f(x)),$$

(iv) **součin funkcí** f a g, který označíme f . g, předpisem

$$\forall_{x\in D(f)} ((f\,.\,g)(x) = f(x)\,.\,g(x)),$$

(v) **podíl funkcí** f a g, který označíme $\frac{f}{g}$, předpisem

$$\forall_{x\in D(f)} (g(x)\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}),$$

(vi) **absolutní hodnotu funkce** f, kterou označíme $|f|$, předpisem

$$\forall_{x\in D(f)} ((|f|(x) = |f(x)|).$$

ÚMLUVA. Souhrnně nazýváme výše uvedené operace funkční operace.

Poznámka. Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí i reálný násobek a absolutní hodnota funkce jsou opět funkce.

Poznámka. Funkční operace mají analogické vlastnosti jako tytéž operace na množině všech reálných čísel R.

Poznámka. Nechť f a g jsou funkce takové, že D(f) = D(g). Nechť c je reálné číslo.
Potom D(f + g) = D(f – g) = D(c .f) = D(f . g) = D($|f|$) = D(f) = D(g), ale pro podíl $\frac{f}{g}$ platí
D($\frac{f}{g}$) = $\{x,\ x\in D(g)\wedge g(x)\neq 0\}$, mj. D($\frac{f}{g}$) $\subset$ D(f) = D(g).

Poznámka. Reálný násobek funkce f (tj. c . f pro c $\in R$) jsme nemuseli definovat, protože jsme jej mohli uvést jako součin konstantní funkce K_c a funkce f.

2. 4. 3 ***Definice***: Nechť f je reálná funkce, c $\in$ D(f). Řekneme, že c je **nulový bod funkce** f, jestliže f(c) = 0.

Poznámka. Někdy se místo termínu nulový bod funkce používá termín kořen funkce.

ZNAČENÍ. Je-li f reálná funkce a M množina taková, že M $\subset$ D(f), potom symbolem f $\neq$ 0 v množině M (resp. f = 0 v množině M, resp. f < 0 v množině M, resp. f $\le$ 0 v množině M, resp. f > 0 v množině M, resp. f $\ge$ 0 v množině M) rozumíme $\forall_{x\in M}$ (f(x) ≠ 0) (resp. $\forall_{x\in M}$ (f(x) = 0), resp. $\forall_{x\in M}$ (f(x) < 0), resp. $\forall_{x\in M}$ (f(x) ≤ 0), resp. $\forall_{x\in M}$ (f(x) > 0), resp. $\forall_{x\in M}$ (f(x) ≥ 0)).

2. 4. 4 ***Definice***: Nechť f je funkce, M množina taková, že M ⊂ D(f), a c ∈ D(f).

(i) **Suprémum** (resp. **infimum**) **funkce** f **na množině** M je suprémum (resp. infimum) množiny f(M).

(ii) **Maximum** (resp. **minimum**) **funkce** f **na množině** M je maximum (resp. minimum) množiny f(M).

(iii) **Extrém funkce** f **v množině** M je maximum funkce f v množině M nebo minimum funkce f v množině M.

(iv) Řekneme, že **funkce** f **nabývá v bodě** c **maxima** (resp. **minima**) **vzhledem k množině** M, jestliže c ∈ M a f(c) = max (f(M)) (resp. f(c) = min (f(M))).

(v) Řekneme, že **funkce** f **nabývá v bodě** c **extrému vzhledem k množině** M, jestliže funkce f nabývá v bode c maxima nebo minima vzhledem k množině M.

(vi) Řekneme, že **funkce** f je **omezená** (resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**) **v množině** M, jestliže množina f(M) je omezená (resp. shora omezená, resp. zdola omezená).

ÚMLUVA. Pojmy suprémum, infimum, maximum, minimum, extrém funkce, omezená, shora omezená a zdola omezená funkce jsou relativní, protože jsou vázány vzhledem k podmnožině definičního oboru funkce. Uvedeme-li tyto pojmy bez vztahu k nějaké podmnožině definičního oboru funkce, potom tím rozumíme, že jde o tyto vlastnosti vzhledem k celému definičnímu oboru funkce.

ZNAČENÍ. Nechť f je reálná funkce, M množina taková, že M ⊂ D(f). Symbolem sup(f) (resp. $\sup_M(f)$) označíme suprémum funkce f (resp. suprémum funkce f vzhledem k množině M). Analogicky pro infimum, maximum, minimum.

Poznámka. (booleovské funkce). Řekneme, že f je booleovské funkce, jestliže f je reálná funkce taková, že $\exists_{n\in N}\left(D(f)\subset\{0,1\}^n\right)\wedge H(f)\subset\{0,1\}$.

Booleovské funkce jsou potřebné v logice, ale také např. v teorii obvodů, v teorii automatů. Booleovské funkce jsou vždy omezené. Někdy se místo termínu booleovská funkce používá termínu spínací funkce nebo logická funkce.