2. Formuli φ negujte a zjednodušte, jestliže:

(i) $\varphi = \forall_{x \in R} \forall_{y \in R} \left(x < y \Rightarrow \exists_{z \in Q} (x < z < y) \right)$

Řešení:

$$\neg \varphi = \neg \left(\forall_{x \in R} \forall_{y \in R} \left(x < y \Rightarrow \exists_{z \in Q} (x < z < y) \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{x \in R} \neg \left(\forall_{y \in R} \left(x < y \Rightarrow \exists_{z \in Q} (x < z < y) \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{x \in R} \exists_{y \in R} \neg \left(x < y \Rightarrow \exists_{z \in Q} (x < z < y) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{x \in R} \exists_{y \in R} \left(x < y \wedge \neg \left(\exists_{z \in Q} (x < z < y) \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{x \in R} \exists_{y \in R} \left(x < y \wedge \forall_{z \in Q} \neg (x < z < y) \right) \Leftrightarrow$$

$$\exists_{x \in R} \exists_{y \in R} \left(x < y \wedge \forall_{z \in Q} (x \geq z \vee z \geq y) \right).$$

Opět použijeme větu 1.2.7 o tautologiích predikátového počtu, nejprve dvakrát tautologii (iv):

$$\exists_{x \in M} \neg (\alpha (x)) \Leftrightarrow \neg \forall_{x \in M} (\alpha (x))$$

Nyní je třeba se zamyslet, jak budeme negovat obsah závorky $\left(x < y \Rightarrow \exists_{z \in Q} (x < z < y) \right)$. Jedná se o implikaci, tady stačí použít větu 1.2.3 o tautologiích výrokového počtu (ii):

$(\neg (\alpha \Rightarrow \beta)) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \neg \beta)$):

Tedy negace závorky $\left(x < y \Rightarrow \exists_{z \in Q} (x < z < y) \right)$ bude $\left(x < y \wedge \neg \left(\exists_{z \in Q} (x < z < y) \right) \right)$.

Teď opět použijeme větu 1.2.7 o tautologiích predikátového počtu (iii):

$$\forall_{x \in M} \neg (\alpha (x)) \Leftrightarrow \neg \exists_{x \in M} (\alpha (x)),$$

A nyní musíme znegovat dvojitou nerovnost $(x < z < y)$, což je vlastně konjunkce dvou nerovností $(x < z) \wedge (z < y)$.

Konjunkci znegujeme podle věty 1.2.3 o tautologiích výrokového počtu (iv) : (2. de Morganovo pravidlo)

$(\neg (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg \alpha \vee \neg \beta))$:

$$\neg((x < z) \wedge (z < y)) \Leftrightarrow (\neg(x < z) \vee \neg(z < y)) \Leftrightarrow ((x \geq z) \vee (z \geq y))$$

.