

pisemné práce ze středoškolské matematiky, část 30, řešení:

POSLOUPNOSTI 1

1.

$$a_n = \frac{2-n}{2n+1}; \quad a_{n+1} = \frac{1-n}{2n+3}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-n}{2n+3} - \frac{2-n}{2n+1} = \frac{-5}{\underline{\underline{(2n+3)(2n+1)}}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1-n}{2n+3}}{\frac{2-n}{2n+1}} = \frac{-2n^2 + n + 1}{\underline{\underline{-2n^2 + n + 6}}}$$

a)
$$\underline{\underline{a_{n+1} = a_n - \frac{5}{(2n+3)(2n+1)}}}; \quad a_1 = \frac{1}{3}$$

nebo
$$\underline{\underline{a_{n+1} = a_n \cdot \frac{-2n^2 + n + 1}{-2n^2 + n + 6}}}; \quad a_1 = \frac{1}{3}$$

b)
$$a_{n+1} - a_n = \frac{-5}{(2n+3)(2n+1)} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{klesající}}}$$

c) $\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{7}; \dots$ dál klesá \Rightarrow shora omezená a limita (viz g)

\Rightarrow omezená zdola \Rightarrow omezená

d) není aritmetická ($a_{n+1} - a_n$ závisí na n)

e) není geometrická ($\frac{a_{n+1}}{a_n}$ závisí na n)

f)
$$\underline{\underline{a_5 = -\frac{3}{11}}}; \quad \underline{\underline{a_7 = -\frac{1}{3}}}; \quad \underline{\underline{a_{15} = -\frac{13}{31}}}$$

g)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{2n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{2 + \frac{1}{n}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Provedeme $a_{n+1} - a_n$ a $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. To potom využijeme u všech úkolů.

Rekurentní vyjádření (stačí napsat jednu možnost)

$n \in \mathbb{N}$, jmenovatel $(2n+3)(2n+1)$ je kladný

$$\frac{2}{n} \rightarrow 0; \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

2.

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

a_n je 170 % z $a_0 \Rightarrow \frac{a_n}{a_0} = 1,7$ takže:

$$1,7 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5$$

$p = \left(\sqrt[5]{1,7} - 1\right) \cdot 100$ V každém roce je třeba zvýšit výrobu o 11,2 %.

$p \doteq 11,2$