

Jak řešit rovnici se substitucí, která vede k rovnici kvadratické

Zadání: Řeš v množině reálných čísel rovnici: $2^x + \frac{16}{2^x} = 10$

1. krok:

Zavedeme okamžitě a bez váhání substituci: $y = 2^x$ a rovnice získá tento, mnohem příjemnější tvar:

$$2^x + \frac{16}{2^x} = 10$$

$$y + \frac{16}{y} = 10$$

2. krok:

Rovnici vynásobíme tak, abychom se zbavili zlomků:

$$2^x + \frac{16}{2^x} = 10$$

$$y + \frac{16}{y} = 10 \quad / \cdot y$$

$$y^2 + 16 = 10y$$

3. krok:

Získali jsme krásnou kvadratickou rovnici kterou vyřešíme.

$$2^x + \frac{16}{2^x} = 10$$

$$y + \frac{16}{y} = 10 \quad / \cdot y$$

$$y^2 + 16 = 10y$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = 8$$

4. krok:

Vrátíme se zpět k substituci, místo y vrátíme původní funkci 2^x a rovnici dořešíme pro x .

$$2^x + \frac{16}{2^x} = 10$$

$$y + \frac{16}{y} = 10 \quad / \cdot y$$

$$y^2 + 16 = 10y$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2}$$

$$y_{1;2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2; y_2 = 8$$

$$\text{a) } 2^x = 2 = 2^1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{b) } 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

5. krok:

Provedeme zkoušku a zapíšeme výsledek:

$$2^x + \frac{16}{2^x} = 10$$

$$y + \frac{16}{y} = 10 \quad / \cdot y$$

$$y^2 + 16 = 10y$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2}$$

$$y_{1;2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2; y_2 = 8$$

$$\text{a) } 2^x = 2 = 2^1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{b) } 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Zkouška:

$$L(1) = 2 + 8 = 10 = P(1)$$

$$L(3) = 8 + 2 = 10 = P(3)$$

$$K = \{1; 3\}$$